Metody statystyczne w ubezpieczeniach
– notatki do wykładu z roku akad. 2006/2007
spisane w LaTeXu przez studentów *

prowadzący wykład: **prof. Lesław Gajek**

9 stycznia 2008

Spis treści

* Notatki mogą zawierać błędy

1 Nierówność Crammera-Lundberga, istnienie współczynnika dopasowania – Agnieszka Walczuk, Przemysław Świtalski

Stosujemy następujące założenia:

1. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ - ciąg wypłat, są to zmienne losowe i.i.d.;
2. $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ - ciąg składek, niech: $\forall_{i=1,2,\cdots,n}\ \gamma_i = \gamma$;
3. u - kapitał początkowy; $\Psi(u)$ - prawdopodobieństwo ruiny przy kapitale początkowym u;

Definicja 1.1 *Liczbę r_0 nazywamy współczynnikiem dopasowania (adjustment coefficient), jeżeli*

$$\mathbb{E}e^{-r_0(\gamma - X_1)} = 1.$$

Lub inaczej: współczynnik dopasowania jest dodatnim rozwiązaniem równania:

$$M_X(r) = e^{\gamma r}.$$

Aby współczynnik dopasowania był dobrze określony, zmienna losowa X oraz parametr γ muszą spełniać określone warunki.

Twierdzenie 1.2 *Jeżeli $\mathbb{E}X_1 < \gamma, \mathbb{P}(X_1 > \gamma) > 0$ oraz zbiór*

$$M_0 = \{r \geqslant 0 : \mathbb{E}e^{-r(\gamma - X_1)} < \infty\}$$

jest prawostronnie otwarty, to istnieje współczynnik dopasowania.

Dowód 1.3 *Dokładny dowód i bardziej szczegółowe twierdzenie znajduje sie u Otta (strona 220). Oznaczmy $M(r) = e^{-r\gamma}\mathbb{E}e^{rX_1}$. Wtedy funkcja $M(r)$ jest wypukła (a nawet ściśle wypukła tam, gdzie jest skończona). Niech $r_1, r_2 \in M_0 = [0, a)$ i $a > 0$ i $0 < \epsilon < 1$. Wtedy*

$$M(\epsilon r_1 + (1-\epsilon) r_2) = \mathbb{E}[e^{-(\epsilon r_1 + (1-\epsilon) r_2)(\gamma - X_1)}] <$$

$$\mathbb{E}[\epsilon e^{-r_1(\gamma - X_1)} + (1-\epsilon) e^{-r_2(\gamma - X_1)}] = \epsilon M(r_1) + (1-\epsilon) M(r_2).$$

Nierówność wynika z wypukłości funkcji e^x. Ponieważ pokazaliśmy wypukłość $M(r)$ to zbiór ten jest przedziałem (jak wyżej).

Ponadto $\mathbb{E}X_1^- < \infty$, a z tego wynika, że $M'(0^+) = \mathbb{E}X_1 - \gamma$, bo dla dowolnego $r > 0$:

$$\frac{M(r) - M(0)}{r} = \mathbb{E}\frac{e^{-r(\gamma - X_1)} - 1}{r} \to \mathbb{E}(\gamma - X_1) = \mathbb{E}X_1 - \gamma < \infty,$$

zbieżność wynika z faktu, że przechodzimy z granicą pod całkę, a są to ciągi monotoniczne, wiec teza wynika z twierdzenia Lebesque'a o zbieżności monotonicznej.

Załóżmy teraz, że $a = \infty$, wtedy:

$$M(r) = \int_0^\gamma e^{-r(\gamma - x)} dF(x) + \int_\gamma^\infty e^{-r(\gamma - x)} dF(x) \geqslant$$

$$\int_0^\gamma e^{-r(\gamma-x)}dF(x) + \int_{\gamma+\delta}^\infty e^{-r(\gamma-x)}dF(x) \geqslant$$

$$\int_0^\gamma e^{-r(\gamma-x)}dF(x) + \min\{e^{r(x-\gamma)} : x \in [\gamma+\delta, \infty)\}\mathbb{P}(X_1 > \gamma+\delta) =$$

$$\int_0^\gamma e^{-r(\gamma-x)}dF(x) + e^{r\delta}\mathbb{P}(X_1 > \gamma+\delta) \to \infty \text{ dla } r \to \infty.$$

Otrzymujemy, że dla $r \to \infty : M(r) \to \infty$ *a dodatkowo* $M(r)$ *jest ciągłe, więc istnieje rozwiązanie. Jeżeli natomiast* $a < \infty$ *to dla* $r \to a$ *z definicji* M_0 *wynika, że* $M(r) \to \infty$ *i analogicznie jak powyżej - z ciągłości* $M(r)$ *wynika istnienie rozwiązania.*

Jeżeli potrafimy wyznaczyć współczynnik dopasowania, możemy łatwo oszacować prawdopodobieństwi ruiny z następującej nierówności.

Twierdzenie 1.4 *Jeżeli istnieje współczynnik dopasowania* $r_0 > 0$*, to dla dowolnego* u *zachodzi nierówność Crammera-Lundberga:*

$$\Psi(u) \leqslant e^{-r_0 u}.$$

Wiemy, że dla dowolnego n zachodzi: $\Psi_n(u) \leqslant \Psi(u)$, a więc o ile istnieje r_0 nierówność Crammera-Lundberga można stosować także do prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasowym (dla n okresów).

Dowód 1.5 *Dowodu na zajęciach nie było. Bardziej zainteresowanych odsyłam do Otta (strona 233), który podaje dokładny wzór na prawdopodobieństwo ruiny, a mianowicie:*

$$\Psi(u) = \frac{e^{-r_0 u}}{\mathbb{E}[e^{-r_0 U(T)}|T < \infty]}.$$

Ponieważ $U(T)$ *w momencie ruiny* T *jest ujemne, więc w mianowniku występuje liczba większa od jedynki to prawdopodobieństwo ruiny jest mniejsze od licznika.*

2 Własności estymatora współczynnika dopasowania, który wykorzystuje losową liczbę obserwacji estymatora – Krzysztof Zalewski

$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ - składki netto
$X_1, \ldots, X_n$ - wypłaty
Założenie generalne: $X_1, X_2, \ldots,$ iid, $\gamma_i \equiv \gamma$

Definicja 2.1 $r_0 > 0$ *nazywamy* współczynnikiem dopasowania*, jeżeli*

$$\mathbb{E}\exp(-r_0(\gamma - X_1)) = 1.$$

- $N_1 = min\{n \geqslant 1 : \overline{X_n} < \gamma, \exists i \in \{1, \ldots, n\} : X_i > \gamma\}$
- $N_k = max\{1 \leqslant n \leqslant k : \overline{X_n} < \gamma, \exists i \in \{1, \ldots, n\} : X_i > \gamma\}$, gdy $N_1 \leqslant k$.

- Funkcja generujaca momenty: $M_n(r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(-r(\gamma - X_i))$
- $Pr(\exists r > 0 : M_N(r) = 1) = 1$
- $\widehat{r_{N_k}}$ - rozwiązanie równania $M_{N_k}(r) = 1$
- $\widehat{r_{N_k}}$ - estymator r_0 dobrze zdefiniowany ($tzn. > 0$)

Twierdzenie 2.2 *Załóżmy, że $\mathbb{E}X_1 < \gamma, Pr(X_1 > \gamma) > 0$ i M_0 jest prawostronnie otwarty. Wtedy:*

1. $Pr\{w : \exists k_0 : \forall k > k_0 \quad N_k(w) = k\} = 1$
2. $\forall k \geqslant 1 \quad k[1 - 2m(\gamma)^k - Pr(X_1 \leqslant \gamma)^k] \leqslant \mathbb{E}N_k \leqslant k + \frac{m(\gamma)^k}{1-m(\gamma)} + \frac{Pr(X_1 \leqslant r)^k}{Pr(X_1 > \gamma)} \; m(\gamma) = inf_{r>0}M(r)$

Twierdzenie 2.3 *Załóżmy, że $\mathbb{E}X_1 < \gamma, Pr(X_1 > \gamma) > 0, M_0$ jest prawostronnie otwarty. Jeżeli M_0 jest ograniczony (zakładamy dodatkowo, że $2r_0 \in M_0$), to wtedy:*

$$\lim_{k\to\infty} Pr(\sqrt{k}(\widehat{r_{N_k}} - r_0) \leqslant t) = \phi(\frac{M'(r_0)}{\sqrt{M(2r_0) - 1}}t)$$

Dowód 2.4 *(i)*

$$Pr(|k - N_k| > r) = Pr(\overline{X}_{k-r} \geqslant \gamma, \overline{X}_{k-r+1} \geqslant \gamma, \ldots, \overline{X_k} \geqslant \gamma, N_1 \leqslant k) + Pr(N_1 > k + r) \leqslant Pr(\overline{X}_k \geqslant \gamma) + Pr(N_1 > k + r)$$

Do oszacowania pierwszego skladnika sumy uzyjemy nierownosci Charnoffa:

$$Pr(\overline{X_k} \geqslant \gamma) \leqslant m(\gamma)^k \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&Pr(N_1 > k + r)\\
&= Pr[\{X_1 \leqslant \gamma, \ldots, X_{k+r} \leqslant \gamma\} \cup \{\exists 1 \leqslant i \leqslant k + r : X_1 \leqslant \gamma, \ldots, X_{i-1} \leqslant \gamma, X_i > \gamma, \overline{X}_i \geqslant \gamma, \ldots, \overline{X}_{k+r} \geqslant \gamma\}]\\
&= Pr\{X_1 \leqslant \gamma, \ldots, X_{k+r} \leqslant \gamma\} + Pr\{\exists 1 \leqslant i \leqslant k + r : X_1 \leqslant \gamma, \ldots, X_{i-1} \leqslant \gamma, X_i > \gamma, \overline{X}_i \geqslant \gamma, \ldots, \overline{X}_{k+r} \geqslant \gamma\}\\
&\leqslant Pr(X_1 \leqslant \gamma)^{k+r} + Pr(\overline{X}_{k+r} \geqslant \gamma)
\end{aligned} \tag{2}$$

Dla $r = 0$ z (1) i (2):

$$Pr(N_k \neq k) \leqslant m(\gamma)^k + Pr(X_1 < \gamma)^k + Pr(\overline{X}_k \geqslant \gamma) \leqslant 2m(\gamma)^k + Pr(X_1 < \gamma)^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Pr(N_k \neq k) \leqslant 2\frac{m(\gamma)}{1 - m(\gamma)} + \frac{Pr(X_1 \leqslant \gamma)}{Pr(X_1 > \gamma)} < \infty$$

Z lematu Borela–Cantelliego – z prawdopodobieństwem 1 zachodzi:

$$\exists k_0 > o : \forall k > k_0 N_k = k$$

(ii)
$\mathbb{E}N_k = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(N_k \geqslant i)$ *z RP:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} Pr(N_k \geqslant i) &= \sum_{i=1}^{k} Pr(N_k \geqslant i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} Pr(N_k \geqslant i) \leqslant k + \sum_{i=k+1}^{\infty} Pr(N_1 \geqslant i) \leqslant k + \sum_{i=k}^{\infty} Pr(N_1 > i)\\ &\leqslant k + \sum_{r=0}^{\infty} Pr(N_1 > k + r) \leqslant k + \sum_{r=0}^{\infty} [Pr(X_1 \leqslant \gamma^{k+r} + Pr(\overline{X}_{k+r} \geqslant \gamma)]\\ &= k + Pr(X_1 \leqslant \gamma)^k \frac{1}{Pr(X_1 > \gamma)} + m(\gamma)^k \frac{1}{1 - m(\gamma)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N_k = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(N_k \geqslant i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} Pr(N_k \geqslant i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} Pr(N_k \geqslant k) = k * Pr(N_k \geqslant k)\\ = k * (1 - Pr(N_k < k)) \geqslant k * (1 - Pr(N_k \neq k)) \geqslant k * (1 - (2m(\gamma)^k + Pr(X_1 \leqslant \gamma)^k)\end{aligned}$$

3 Prawdopodobieństwo ruiny - charakteryzacja i aproksymacja – Zuzanna Branicka, Anna Missol

Przypomnienie

- $S_n = u + n\gamma - \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d.
- $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon S_n < 0\}$
- $\{\tau < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leqslant n\}$
- $\psi(u) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$
- $\psi_n(u) = \mathbb{P}(\tau \leqslant n)$
- $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau \leqslant n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leqslant n\}) = \mathbb{P}(\tau < \infty) = \psi(u)$

Definicja 3.1 $r_0 > 0$ *nazywamy współczynnikiem dopasowania, jeżeli*

$$\mathbb{E}e^{-r_0(\gamma - X_1)} = 1$$

Twierdzenie 3.2 *Jeżeli istnienie współczynnik dopasowania* $r_0 > 0$*, to*

$$\psi(u) \leqslant e^{-r_0 u} \quad \forall u \geqslant 0$$

Lemat 3.3 *Jeżeli* $EX_1 < \gamma$*,* $\mathbb{P}(X_1 > \gamma) > 0$ *oraz zbiór* $M_0 = \{r \geqslant 0 \colon \mathbb{E}e^{-r(\gamma - X_1)} < \infty\}$ *jest prawostronnie otwarty, to istnieje współczynnik dopasowania*

$$M(r) = \mathbb{E}e^{-r(\gamma - X_1)}$$

Twierdzenie 3.4 (Charakteryzacja i aproksymacja prawdopodobieństwa ruiny.) *Zachodzi:*

1. *$\forall u \geqslant 0 \quad \psi_n(u) = (T^{n-1}\psi_1)(u)$, gdzie T operator określony na rodzinie $\mathcal{R}$ funkcji mierzalnych $\mathbb{R}_+ \to [0,1]$ następującym wzorem:*

$$T\rho(u) = \int_0^{u+\gamma} \rho(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma), \text{ gdzie } \rho \in \mathcal{R}$$

2. *$\{\psi_n\}$ jest niemalejącym ciągiem zbieżnym do punktu stałego T, tzn. $\psi = T\psi$*

3. *Jeżeli $EX_1 < \gamma$, $\mathbb{P}(X_1 > \gamma) > 0$, M_0 jest prawostronnie otwarty, to ciąg*

$$R_n(u) = T^n R_0(u),$$

gdzie $R_o(u) = e^{-r_0 u}$, a r_0– współczynnik dopasowania, jest nierosnący i zbieżny do ψ

4. *Jeżeli $EX_1 < \gamma$, $\mathbb{P}(X_1 > \gamma) > 0$, M_0 jest prawostronnie otwarty, to*

$$|R_n(u) - \psi_n(u)| \leqslant \frac{r_0 M^n(r)}{e^{ru}(r_0 - r)} \quad \forall r \in (0, r_0)$$

Dowód 3.5 1. *Dla $n = 1 \quad \psi_1(u) = T^0\psi_1(u)$. Zakładamy, że $\psi_n(u) = (T^{n-1}\psi_1)(u)$ prawdziwe dla n, sprawdzamy dla $n+1$.*

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}(X_1 > u+\gamma) + \mathbb{P}(X_1 \leqslant u+\gamma, \exists \quad k \in \{2,\ldots,n+1\} : S_k < 0) = \\
&= \psi_1(u) + \int_0^{u+\gamma} \mathbb{P}(2 \leqslant \tau \leqslant n+1, X_1 = x)dF(x) = \\
&= \psi_1(u) + \int_0^{u+\gamma} \mathbb{P}(\tau' \leqslant n, u + (\tau'+1)\gamma - x - \sum_{i=1}^{\tau'} X_i' < 0)dF(x) = \\
&= 1 - F(u+\gamma) + \int_0^{u+\gamma} \psi_n(u+\gamma-x) = T\psi_n(u)dF(x) = \\
&= T(T^{n-1}\psi_1)(u) = (T^n\psi_1)(u)
\end{aligned}$$

2. *ψ_n jest niemalejący z definicji.*

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= T\psi_n(u) = \int_0^{u+\gamma} \psi_n(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma) \\
\psi(u) &= \lim_{n\to\infty} \psi_{n+1}(u) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{u+\gamma} \psi_n(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma)
\end{aligned}$$

Korzystając z tw. Lebesgue'a:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_0^{u+\gamma} \lim_{n\to\infty} \psi_n(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma) = \\
&= \int_0^{u+\gamma} \psi(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma) = T\psi(u)
\end{aligned}$$

Zatem $\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ jest punktem stałym T.

3. R_0 jest dobrze określone.

$$\begin{aligned} R_1(u) &= TR_0(u) = \int_0^{u+\gamma} e^{-r_0(u+\gamma-x)}dF(x) + 1 - F(u+\gamma) = \\ &= e^{-r_o n}\int_0^{u+\gamma} e^{-r_0(\gamma-x)}dF(x) + \int_{u+\gamma}^{\infty} 1dF(x) \end{aligned}$$

Wiemy, że

$$1 = M(r_0) = \int_0^{\infty} e^{-r_0(\gamma-x)}dF(x) = \int_0^{u+\gamma} e^{-r_0(\gamma-x)}dF(x) + \int_{u+\gamma}^{\infty} e^{-r_0(\gamma-x)}dF(x)$$

więc:

$$\begin{aligned} R_1(u) &= e^{-r_o n}\left(1 - \int_{u+\gamma}^{\infty} e^{-r_0(\gamma-x)}dF(x)\right) + e^{-r_o n}\int_{u+\gamma}^{\infty} e^{r_o n}dF(x) = \\ &= e^{-r_o n}\left(1 - \int_{u+\gamma}^{\infty}\left(e^{-r_0(\gamma-x)} - e^{r_o n}\right)dF(x)\right) = \\ &= e^{-r_o n}\left(1 - e^{r_0 u}\int_{u+\gamma}^{\infty}\left(e^{-r_0(u+\gamma-x)} - 1\right)dF(x)\right) \leqslant e^{-r_o n} = R_0(u) \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że T jest rosnący: $\forall u \geqslant 0 \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}$ takiego, że $\rho_2(u) - \rho_1(u) \geqslant 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} T\rho_2(u) - T\rho_1(u) &= \int_0^{u+\gamma} \rho_2(u+\gamma-x)dF(x) + 1 - F(u+\gamma) - \\ &- \int_0^{u+\gamma} \rho_1(u+\gamma-x)dF(x) - 1 + F(u+\gamma) = \\ &= \int_0^{u+\gamma} \rho_2(u+\gamma-x) - \rho_1(u+\gamma-x)dF(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Skoro $\forall u \geqslant 0 \quad R_0(u) \geqslant R_1(u)$, to $TR_0(u) \geqslant TR_1(u)$. A ponieważ $TR_0(u) = R_1(u)$ i $TR_1(u) = R_2(u)$, to też $R_1(u) \geqslant R_2(u)$ itd.
Aby pokazać, że $R_n(u) \to \psi(u)$ wystarczy udowodnić (iv).

4.

$$\begin{aligned} TR_0(u) &= \int_0^{u+\gamma} R_0(u+\gamma-x)dF(x) + \psi_1(u) \equiv lR_0 + \psi_1(u) \\ T^2R_0 &= \underbrace{\int_0^{u+\gamma} lR_0(u+\gamma-x)dF(x)} + \underbrace{\int_0^{u+\gamma} \psi_1(u+\gamma-x) + \psi_1(u)} \\ T^2R_0 &= l^2R_0(u) + \psi_2(u) \\ T^3R_0 &= l^3R_0(u) + \underbrace{l\psi_2(u) + \psi_1(u)} = l^3R_0(u) + \psi_3(u) \end{aligned}$$

A zatem:

$$\begin{aligned} R_n(u) &= l^nR_0(u) + \psi_n(u) \\ R_n(u) - \psi_n(u) &= l^nR_0(u) \qquad (3) \end{aligned}$$

Pokażemy, że:

$$\begin{aligned} \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad l^nR_0(u) &\leqslant \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + W > n\gamma + u) \qquad (4) \\ & W \sim \mathit{Exp}(r_0) \text{ niezależne od } X_1, \ldots, X_n \end{aligned}$$

Dla n=1:

$$\mathbb{P}(X_1+W>\gamma+u)=\mathbb{P}(X_1>\gamma+u)+\mathbb{P}(X_1<\gamma+u,X_1+W>\gamma+u)\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^{u+\gamma}\mathbb{P}(W>\gamma+u-x)dF(x)=\int_0^{u+\gamma}e^{-r_0(\gamma+u-x)}dF(x)=lR_0(u)$$

czyli (4) zachodzi dla $n=1$.
I teraz przez indukcję: zakładamy, że (4) zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}$, *udowodnimy, że wtedy zachodzi dla* $n+1$.

$$\begin{aligned} l^{n+1}R_0(u) &= l(l^nR_0)(u)\leqslant\int_0^{u+\gamma}\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_n+W>n\gamma+u+\gamma-x)dF(x)= \\ &= \int_0^{u+\gamma}\mathbb{P}\Big(X_1+\cdots+X_n+X_{n+1}+W>(n+1)\gamma+u|X_{n+1}=x\Big)dF(x)= \\ & \quad X_{n+1}-\ \textit{niezależna kopia}\ \ X_1,\ldots,X_n \\ &= \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}+W>(n+1)\gamma+u) \end{aligned}$$

Zatem (4) zachodzi dla każdego $n\in\mathbb{N}$.
Szukamy ograniczenia z góry na $\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n+W>n\gamma+u)$*:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}e^{r_0(W+X_1+\ldots+X_n)}<\infty,\ \textit{więc:} \\ &\Big(\mathbb{E}e^{-r(\gamma-X_1)}\Big)^n\mathbb{E}e^{-r(u-W)}=\mathbb{E}e^{-r(n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W)}= \\ &=\int_{\{\omega:n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W<0\}}e^{-r(n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W)}d\mathbb{P}(\omega)+ \\ &+\int_{\{\omega:n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W\geqslant0\}}e^{-r(n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W)}d\mathbb{P}(\omega)\geqslant \\ &\geqslant\int_{\{\omega:n\gamma+u-X_1-\ldots-X_n-W<0\}}1\,d\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n+W>n\gamma+u)\quad\forall\, r\in(0,r_0) \end{aligned}$$

A ponieważ:

$$\mathbb{E}e^{-r(u-W)}=\int_0^\infty e^{-r(u-w)}r_0e^{-r_0w}dw=e^{-ru}r_0\int_0^\infty e^{-(r_0-r)w}dw=\frac{r_0e^{-ru}}{r_0-r}$$

i

$$\Big(\mathbb{E}e^{-r(\gamma-X_1)}\Big)^n=M^n(r),$$

więc dostaniemy:

$$\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_n+W>n\gamma+u)\leqslant M^n(r)\frac{r_0e^{-ru}}{r_0-r}\quad\forall\, r\in(0,r_0)\tag{5}$$

Zatem z (5), (4) i (3) mamy:

$$R_n(u)-\psi_n(u)\leqslant M^n(r)\frac{r_0e^{-ru}}{r_0-r}\quad\forall\, r\in(0,r_0)\qquad\square$$

4 Prawdopodobieństwo ruiny, a rozwiązanie równania operatorowego – Jakub Mieczkowski

Lemat 4.1 *Jeżeli istnieje współczynnik dopasowania r_0 oraz $\varphi = T\varphi$ i*

$$\forall_{u \geqslant 0}\ \varphi(u) \leqslant\ e^{-r_0 * u}$$

to φ jest prawdopodobieństwem ruiny.

Dowód 4.2

$$\varphi(u) \leqslant e^{-r_0 * u} \Rightarrow T\varphi(u) = \varphi(u) \leqslant TR_0(u) = R_1$$

$(boR_0 = e^{-r_0 * u})$

$$\varphi(u) \leqslant R_1(u) \Rightarrow T\varphi(u) = \varphi(u) \leqslant TR_1(u) = R_2$$

iterując w ten sposób

$$\varphi(u) \leqslant TR_n(u) \longrightarrow \Psi(u)$$

(zbieznosc z tw z tematu 3). Zatem

$$\varphi \leqslant \varphi(u) \leqslant \Psi(u)$$

a tak naprawdę

$$T\varphi(u) = \int_0^{u+\gamma} \varphi(u + \gamma - x) dF(x) + \Psi_1(u) \geqslant \Psi_1(u)$$

to

$$\varphi(u) \geqslant \Psi_1(u)$$

$$\varphi(u) = T\varphi(u) \geqslant T\Psi_1(u) = \Psi_2(u)$$

iterując

$$\varphi(u) \geqslant \Psi_n \longrightarrow \Psi(u)$$

(zbieznosc z tw z tematu 3).

5 Twierdzenie o szacowaniu prawdopodobieństwa ruiny z góry – Zuzanna Branicka

$\mathcal{R}$ — rodzina funkcji mierzalnych $\mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, T — operator na $\mathcal{R}$ określony wzorem:

$$T\rho(u) = \int_0^{u+\gamma} \rho(u + \gamma - x) dF(x) + 1 - F(u + \gamma)$$

Twierdzenie 5.1 *Jeżeli $\rho \in \mathcal{R}$ ma własność*

$$\forall\ u \geqslant 0 \quad T\rho(u) \leqslant \rho(u) \tag{6}$$

$$\textit{to} \qquad \forall\ u \geqslant 0 \quad \psi(u) \leqslant \rho(u) \tag{7}$$

Dowód 5.2 *Korzystając z (6):*

$$\rho(u) \geqslant T\rho(u) = \int_0^{u+\gamma} \rho(u+\gamma-x)dF(x) + \psi_1(u) \geqslant \psi_1(u)$$
$$\rho(u) \geqslant T\rho(u) \geqslant T\psi_1(u) = \psi_2(u)$$
$$\rho(u) \geqslant T\rho(u) \geqslant T\psi_2(u) = \psi_3(u)$$

Iterując:

$$\vdots$$
$$\rho(u) \geqslant \psi_n(u)$$

Przechodząc do granicy po obu stronach:

$$\rho(u) \geqslant \psi(u)$$

Otrzymujemy więc (7). □

6 Twierdzenie o scałkowanym błędzie średniokwadratowym estymatora jądrowego gęstości – Katarzyna Sumlińska, Wanda Niemyska

Tam gdzie nie ma granic całkowania to całkujemy po R.

Założenia A

- $f : R \to R \quad f \in C^m(R)$
- $k : R \to R \quad \int k(x)dx = 1 \quad \int x^i k(x)dx = 0 \quad i = 1 \dots m-1$

Chcemy otrzymać wzór na $f(x)$. Dla $h > 0$ mamy

$$f(x) - \frac{1}{h}\int f(x)k(\frac{x-t}{h})dt = -\int_R [-f(x) + f(x-hv)]k(v)dv =$$

Z rozwinięcia Taylora mamy:

$$-\int [\sum_{i=1}^{m-1} f^i(x)\frac{(-hv)^i}{i!} - \int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} f^m(x-z)dz]k(v)dv =$$

$$-\sum_{i=1}^{m-1} f^i(x)\frac{(-h)^i}{i!}\int_R v^i k(v)dv + \int\int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} f^m(x-z)k(v)dzdv$$

Po przekształceniu mamy:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int f(x)k(\frac{x-t}{h})dt + \int\int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} f^m(x-z)k(v)dzdv$$

Jeśli teraz $f \in C^m$, f-gęstość rozkładu, $X_1 \dots X_n$ próba prosta z f (o dystybuancie F)

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})dF_n = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k(\frac{x-X_i}{h})$$

Następnie obliczamy kolejno:

$$E\hat{f}_n(x) = E\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k(\frac{x-X_i}{h}) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} Ek(\frac{x-X_1}{h}) = \frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})f(t)dt$$

Obciążenie:

$$E\hat{f}_n(x) - f(x) = \frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})f(t)dt - f(x) = -\int\int_0^{hv}\frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!}f^m(x-z)k(v)dzdv$$

Wariancja

$$Var(\hat{f}_n(x)) = Var(\frac{1}{hn}\sum_{i=1}^{n} k(\frac{x-X_i}{h})) = \frac{1}{(nh)^2}nVar[k(\frac{x-X_1}{h})] = \frac{1}{nh^2}E[k(\frac{x-X_1}{h}) - Ek(\frac{x-X_1}{n})]^2$$

$$= E[\frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})dF_n - \frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})dF(t)]^2$$

Stąd mamy:

$E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2$ = wariancja + obciążenie do kwadratu.

Niech $k \in C^1$ stosujemy podstawienie $t = x - hv$ i całkowanie przez czesci i mamy:

$$\frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})dF(t) = [\frac{1}{h}k(\frac{x-t}{h})F(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{h^2}\int_R k'(\frac{x-t}{h})F(t)dt = \frac{1}{h}\int_R k'(v)F(x-hv)dv$$

$$\frac{1}{h}\int k(\frac{x-t}{h})dF_n(t) = \frac{1}{h}\int_R k'(v)F_n(x-hv)dv$$

$$Var(\hat{f}_n(x)) = E[\frac{1}{h}\int k'(v)[F_n(x-hv) - F(x-hv)]dv]^2$$

Twierdzenie: Przy spełnionych założeniach A i "dalej"

$$E\int(\hat{f}_n(x) - f(x))^2 w(x)dx \leqslant \frac{c_1}{nh} + C_2 h^{2m}$$

gdzie c_1 C_2 podane niżej.

Dowód 6.1

$$\int E[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 dw(x) = I_1 + I_2$$

(podane niżej)

OSZACOWANIE I_1***:***

$$I_1 = h^{-2}\int E\{\int[F_n(x-hv) - F(x-hv)]k'(v)dv\}^2 w(x)dx \tag{8}$$

Skorzystamy teraz z nierówności Holdera w tej postaci:

$$[\int g_1(v)g_2(v)dv]^2 \leqslant (\int g_1(v)^2dv)(\int g_2(v)^2dv), \tag{9}$$

podstawiając $g_1(v) = [F_n(x-hv) - F(x-hv)]\sqrt{|k'(v)|}$ *oraz* $g_2(v) = \sqrt{|k'(v)|}$.

Otrzymujemy:

$$I_1 \leqslant h^{-2} \int E\{\int [F_n(x-hv) - F(x-hv)]^2 |k'(v)| dv \int |k'(v)| dv\} w(x) dx$$
$$= \frac{\int |k'(v)| dv}{h^2} \int\int E[F_n(x-hv) - F_n(x) + F(x) - F(x-hv)]^2 |k'(v)| dv w(x) dx$$

(Równość wynika z tego, że $F_n(x)$, $F(x)$ nie zależy od v, więc możemy je wstawić pod znak całki).

Policzymy teraz $E[F_n(x-hv) - F_n(x) + F(x) - F(x-hv)]^2$. Niech $Y = F_n(x-hv) - F_n(x)$:

$$E[F_n(x-hv) - F_n(x) + F(x) - F(x-hv)]^2 = E[Y - EY]^2 = VarY = Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{1}_{(-\infty,x-hv)}(X_i) - \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_i))]$$

Dla $v > 0$ mamy: $(\mathbf{1}_{(-\infty,x-hv)}(X_i) - \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_i))$ jest równe 0 dla $X_i \leqslant x - hv$ lub $X_i > x$ oraz -1 dla $x - hv < X_i \leqslant X$.

Czyli mamy rozkład dwupunktowy $\{-1, 0\}$ (dla $v \leqslant 0$ - rozkład dwupunktowy $\{0, 1\}$).
Dla $v > 0$:

$$P(\mathbf{1}_{(-\infty,x-hv)}(X_i) - \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_i)) = -1) = F(x) - F(x-hv)$$

(dla $v \leqslant 0$: $= -F(x) + F(x-hv)$).
Ponieważ wariancja rozkładu dwupunktowego jest równa "pq", dostajemy:

$$\begin{aligned}
Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{1}_{(-\infty,x-hv)}(X_i) - \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_i))] &= \frac{1}{n^2} n Var(\mathbf{1}_{(-\infty,x-hv)}(X_1) - \mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_1)) \\
&= \frac{1}{n}|F(x) - F(x-hv)|(1 - |F(x) - F(x-hv)|) \\
&\leqslant \frac{1}{n}|F(x) - F(x-hv)| \\
&= \frac{1}{n}|\int_{x-hv}^{x} f(t)dt| = \frac{1}{n}| - \int_0^{-hv} f(x-z)dz|
\end{aligned}$$

Wracając do szacowanie I_1, dostajemy:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \frac{\int |k'(v)| dv}{h^2} \int\int \frac{1}{n}\int_0^{-hv} f(x-z)dz |k'(v)| dv w(x) dx \\
&\leqslant \frac{\int |k'(v)| dv}{nh^2} \int\int \int_R \mathbf{1}_{[0,-hv]}(z) f(x-z) dz w(x) dx |k'(v)| dv \\
&= \frac{\int |k'(v)| dv}{nh^2} \int\int \mathbf{1}_{[0,-hv]}(z) dz \int f(x-z) w(x) dx |k'(v)| dv
\end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z tego, że $\int \mathbf{1}_{[0,-hv]}(z)dz = |hv|$ oraz:

$$\exists\ c \text{ takie ,że } \int f(x-z)w(x)dx \leqslant c \ \text{ dla każdego } z \in \mathbb{R}$$

Dostajemy więc:

$$I_1 \leqslant \ ... \ \leqslant \frac{c\int |k'(v)| dv}{nh^2} \int |hv||k'(v)| dv = \frac{c}{nh} \int |k'(v)| dv \int |vk'(v)| dv$$

Czyli $I_1 \leqslant \frac{c_1}{nh}$, *gdzie* $c_1 = c \int |k'(v)| dv \int |vk'(v)| dv$.
Korzystając z nierówności Holdera dla funkcji:

$$\int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m+1}(x-z) dz \sqrt{k(v)} \ i \ \sqrt{k(v)} \tag{10}$$

oraz dla funkcji

$$\frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m+1}(x-z) \ i \ 1 \tag{11}$$

oraz założenia, że

$$\int F^{m+1}(x-z) \leqslant D \ dla\ każdego\ z \in R \tag{12}$$

mamy:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_R \left[\int_R \int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m+1}(x-z) k(v) dz dv \right]^2 w(x) dx \\
&\leqslant^{(10)} \int_R \int_R \left[\int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m+1}(x-z) dz \right]^2 |k(v)| dv \int_R |k(v)| dv w(x) dx \\
&\leqslant \int_R |k(v)| \int_R \left[|hv| \frac{1}{|hv|} \int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m+1}(x-z) dz \right]^2 |k(v)| dv w(x) dx \\
&\leqslant^{(11)} \int_R |k(v)| dv \int_R \int_0^{hv} \frac{(hv)^2}{|hv|} \frac{(z-hv)^{2m-2}}{((m-1)!)^2} (F^{m+1}(x-z))^2 dz |k(v)| dv w(x) dx \\
&\leqslant \int_R |k(v)| dv \int_R \frac{(hv)^2}{|hv|} \frac{(z-hv)^{2m-2}}{((m-1)!)^2} \int_0^{hv} (F^{m+1}(x-z))^2 dz |k(v)| dv w(x) dx \\
&\leqslant^{(12)} D \int_R |k| \int_R |hv| \int_0^{hv} \frac{(z-hv)^{2m-2}}{((m-1)!)^2} dz |k(v)| dv dx \\
&= D \frac{\int_R |k(v)| dv}{(m-1)!(2m-1)} \int_0^{hv} (vh)^{2m} |k(v)| dv
\end{aligned}$$

Zatem mamy:

$$I_2 \leqslant h^{2m} C_2$$

7 Lemat o poprawianiu estymatora gęstości metodą rzutowania – Jan Matuszewski

Zarys problemu
Mamy estymator gęstości $\hat{f}$. Jest to źle zdefiniowana gęstość, gdyż $\exists x \in \mathbb{R}$, że $\hat{f} < 0$, chociaż $\int \hat{f} = 1$. Jak sobie poradzić z tym problemem? Otóż będziemy starali się znaleźć estymator, będący jednocześnie poprawnie zdefiniowaną gęstością oraz funkcją leżącą bliżej wyjściowej gęstośći f w sensie normy z $L_2(w)$: $\int (f(x))^2 w(x) dx$.
Modyfikujemy nasz estymator następująco:

$$f_1(x) = \left(\hat{f}(x)\right)_+ = \max(0, \hat{f}(x))$$
$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{c}{w(x)} \qquad \text{gdzie c takie, że} \int f_2(x)dx = 1$$

Ale $f_2(x)$ również może przyjmować wartości ujemne. By tego uniknąć przekształcamy nasz estymator następująco:

$$f^*(x) = \left(\hat{f}(x) - \frac{c}{w(x)}\right)_+ \qquad \text{gdzie c jest takie, że} \int f^*(x)dx = 1$$

Lemat 7.1 *Niech $F = F_+ \cap F_1$, gdzie $F_+ = \{f : f \geqslant 0\}$ oraz $F_1 = \{f : \int f = 1\} \subseteq L_2(w)$. Wtedy f^* zdefiniowany powyżej jest rzutem $\hat{f}$ na F.*

Dowód 7.2 *Jeżeli f^* ma być rzutem $\hat{f}$ na F, to musi zachodzić:*

$$f^* = argmin \int \left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2 w(x)dx$$

gdzie minimum jest wzięte po wszystkich $f \in F$. Pokażemy, że tak jest w istocie. $\forall f \in F$ zachodzi:

$$\Delta = \int \left(\hat{(f)}(x) - f(x)\right)^2 w(x)dx - \int \left(\hat{(f)}(x) - f^*(x)\right)^2 w(x)dx \geqslant 0$$

Ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int \left(2\hat{f}(x) - f(x) - f^*(x)\right)(f^*(x) - f(x))\, w(x)dx \\
&= \int \left(2\hat{f}(x) - f(x) - f^*(x) + f^*(x) - f^*(x)\right)(f^*(x) - f(x))\, w(x)dx \\
&= 2\int \left(\hat{f}(x) - f^*(x)\right)(f^*(x) - f(x))\, w(x)dx + \int (f^*(x) - f(x))^2\, w(x)dx \\
&\geqslant 2\int_{S_+} \left(\hat{f}(x) - f^*(x)\right)(f^*(x) - f(x))\, w(x)dx + 2\int_{S_0} \left(\hat{f}(x) - f^*(x)\right)(-f(x))\, w(x)dx.
\end{aligned} \tag{13}$$

Gdzie $S_+ = \{x \in \mathbb{R}, f^*(x) > 0\}$ oraz $S_0 = \{x \in \mathbb{R}, f^*(x) = 0\}$. Przy okazji zachodzą:

$$\forall x \in S_+ \quad \hat{f}(x) - f^*(x) = \frac{c}{w(x)}$$

oraz

$$\forall x \quad \hat{f}(x) - f^*(x) \leqslant \frac{c}{w(x)},$$

gdyż $\hat{f}(x) - \frac{c}{w(x)} \leqslant \left(\hat{f}(x) - \frac{c}{w(x)}\right)_+ = f^*(x)$.
Kontynuując nasz ciąg nierówności mamy, że:

$$\begin{aligned}
\Delta &\geqslant 2\int_{S_+} \frac{c}{w(x)} (f^*(x) - f(x))\, w(x)dx - 2\int_{S_0} \left(\hat{f}(x) - f^*(x)\right) f(x)w(x)dx \\
&\geqslant 2\int_{S_+} c\,(f^*(x) - f(x))\, dx - 2\int_{S_0} \frac{c}{w(x)} f(x)w(x)dx \\
&= 2c\int_{S_+} f^*(x)dx - 2c\int_{S_+} f(x)dx - 2c\int_{S_0} f(x)dx \\
&= 2c\int_{S_+} f^*(x)dx - 2c\int f(x)dx = 2c(1-1) = 0
\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. Z nierówności (13) mamy, że $2\left\langle \hat{f}-f^*, f^*-f\right\rangle \geqslant 0$. *Wykorzystamy ten fakt, aby dowieść, że rzeczywiście* f^* *lepiej przybliża gęstość* f *niż robi to* $\hat{f}$.
Mamy:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}-f\right\|^2 &= \left\langle \hat{f}-f^*+f^*-f, \hat{f}-f^*+f^*-f\right\rangle \\ &= \left\langle \hat{f}-f^*, f^*-f\right\rangle + \left\langle \hat{f}-f^*, \hat{f}-f^*\right\rangle + \langle f^*-f, f^*-f\rangle + \left\langle f^*-f, \hat{f}-f^*\right\rangle \\ &= 2\left\langle \hat{f}-f^*, f^*-f\right\rangle + \left\|\hat{f}-f^*\right\|^2 + \|f^*-f\|^2 \\ &\geqslant \left\|\hat{f}-f^*\right\|^2 + \|f^*-f\|^2.\end{aligned}$$

Co dowodzi faktu, że estymator f^* *istotnie poprawia estymator* $\hat{f}$.

8 Lemat o poprawianiu estymatora gęstości w normie L^1 – Michał Lis

Niech $f \in \mathcal{F} = \{f \geqslant 0 : \int_{\mathbb{R}} f = 1\}$. Dla dowolnej funkcji $\hat{f}$ takiej, że $\int_{\mathbf{R}} \hat{f} = 1$ definiujemy $f^* = \frac{\hat{f}^+}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+}$. Wtedy:

- $\|f^*-f\| \leqslant \|\hat{f}-f\|$
- $\frac{\|\hat{f}-f\|-\|f^*-f\|}{\|\hat{f}-f\|} \geqslant 1 - \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+}$

Dowód 8.1 *Na wstępie zauważmy, że:*

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{f}-f)^+ - \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}-f)^- = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}-f = 0$$

oraz

$$\int_{\mathbb{R}} (\hat{f}-f)^+ + \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}-f)^- = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}-f|.$$

Dodając stronami otrzymujemy, że

$$2\int_{\mathbb{R}} (\hat{f}-f)^+ = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}-f|.$$

Zatem

$$\int_{\mathbb{R}} |f^*(x)-f(x)|dx = 2\int_{\mathbb{R}} (f^*-f)^+ = 2\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\hat{f}^+}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} - f\right)^+ = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{(\hat{f}^+(x) - f(x)\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+)^+}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+}dx.$$

Zdefiniujmy teraz zbiór $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} : \hat{f}(x) > 0\}$. *Na* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{S}$ *funkcja podcałkowa znika więc możemy obciąć zbiór całkowania do* $\mathbb{S}$. *Ponadto, skoro* $\int \hat{f} = 1$ *to* $\int \hat{f}^+ \geqslant 1$. *Pozwala nam to oszacować licznik:*

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}} \frac{(\hat{f}^+(x) - f(x)\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+)^+}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+}dx &\leqslant 2\int_{\mathbb{S}} \frac{(\hat{f}(x)-f(x))^+}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} = \\ &= \frac{2}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{S}\cap\{x:\hat{f}(x)-f(x)>0\}} (\hat{f}(x)-f(x))^+dx \end{aligned}$$

Ale $\{x : \hat{f}(x) - f(x) > 0\} \subseteq \mathbb{S}$, *gdyż* $f(x) \geqslant 0$. *Więc*

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{S} \cap \{x : \hat{f}(x) - f(x) > 0\}} (\hat{f}(x) - f(x))^+ dx &= \frac{2}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\{x : \hat{f}(x) - f(x) > 0\}} (\hat{f}(x) - f(x))^+ dx = \\
&= \frac{2}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{R}} (\hat{f}(x) - f(x))^+ dx \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy tym samym, że

$$\int_{\mathbb{R}} |f^*(x) - f(x)| dx \leqslant \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx$$

Drugą część tezy pokazemy korzystając z otrzymanego przed chwilą oszacowania. Mianowicie:

$$\frac{\|\hat{f} - f\| - \|f^* - f\|}{\|\hat{f} - f\|} = 1 - \frac{\int_{\mathbb{R}} |f^*(x) - f(x)| dx}{\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx} \geqslant 1 - \frac{\frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx}{\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - f(x)| dx} = 1 - \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}^+}$$

co kończy dowod lematu.