Badanie ewolucji tablic trwania życia: Modyfikacje modelu Lee-Cartera

Wojciech Otto
Wydział Nauk Ekonomicznych
Uniwersytetu Warszawskiego

Konferencja Studenckiego Koła Naukowego Finansów i ubezpieczeń
MIMUW
Warszawa, 26 kwietnia 2012

Rozkład trwania życia

- Długość życia - zmienna losowa *T*
- Parametry rozkładu prawdopodobieństwa:

$$q_x := 1 - \frac{Pr(T>x+1)}{Pr(T>x)}, x = 0,1,2, \dots, 100$$

- Teoretycznie przedmiotem modelowania jest funkcja hazardu:

$$\mu_x \coloneqq -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\Pr(T > x)}{\Pr(T > x)}$$

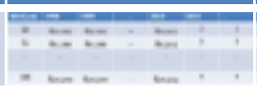
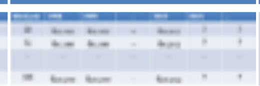
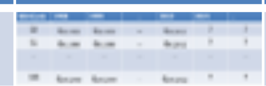
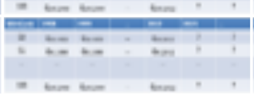
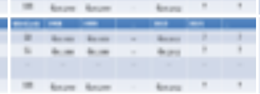
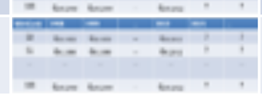
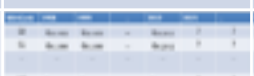
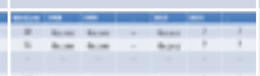
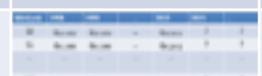
- W praktyce modelujemy logarytm naturalny z tzw. *central mortality rate:*

$$ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - 0.5q_{x,t}}\right)$$

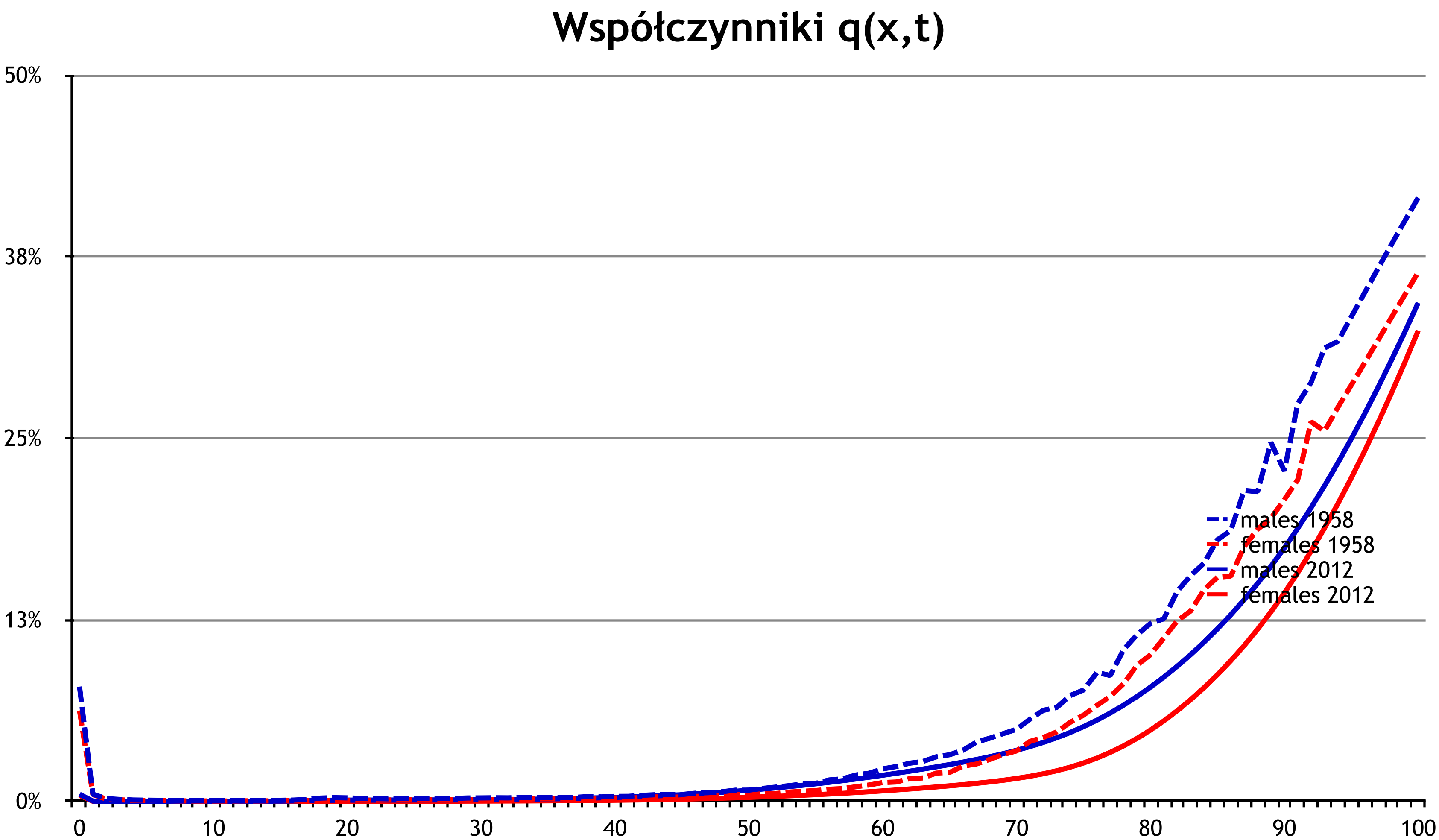
  – gdzie *t* to rok kalendarzowy, z którego pochodzą dane empiryczne na podstawie których oszacowano wartość współczynnika q_x

Problem: ewolucja tablic
proces wydłużania się (?) życia

Badaniu poddano polskie tablice trwania życia GUS z lat 1958-2012,
w przedziale wiekowym 50 lat – 100 lat,
osobno dla mężczyzn, kobiet, oraz tablice wspólne (tzw. unisex)

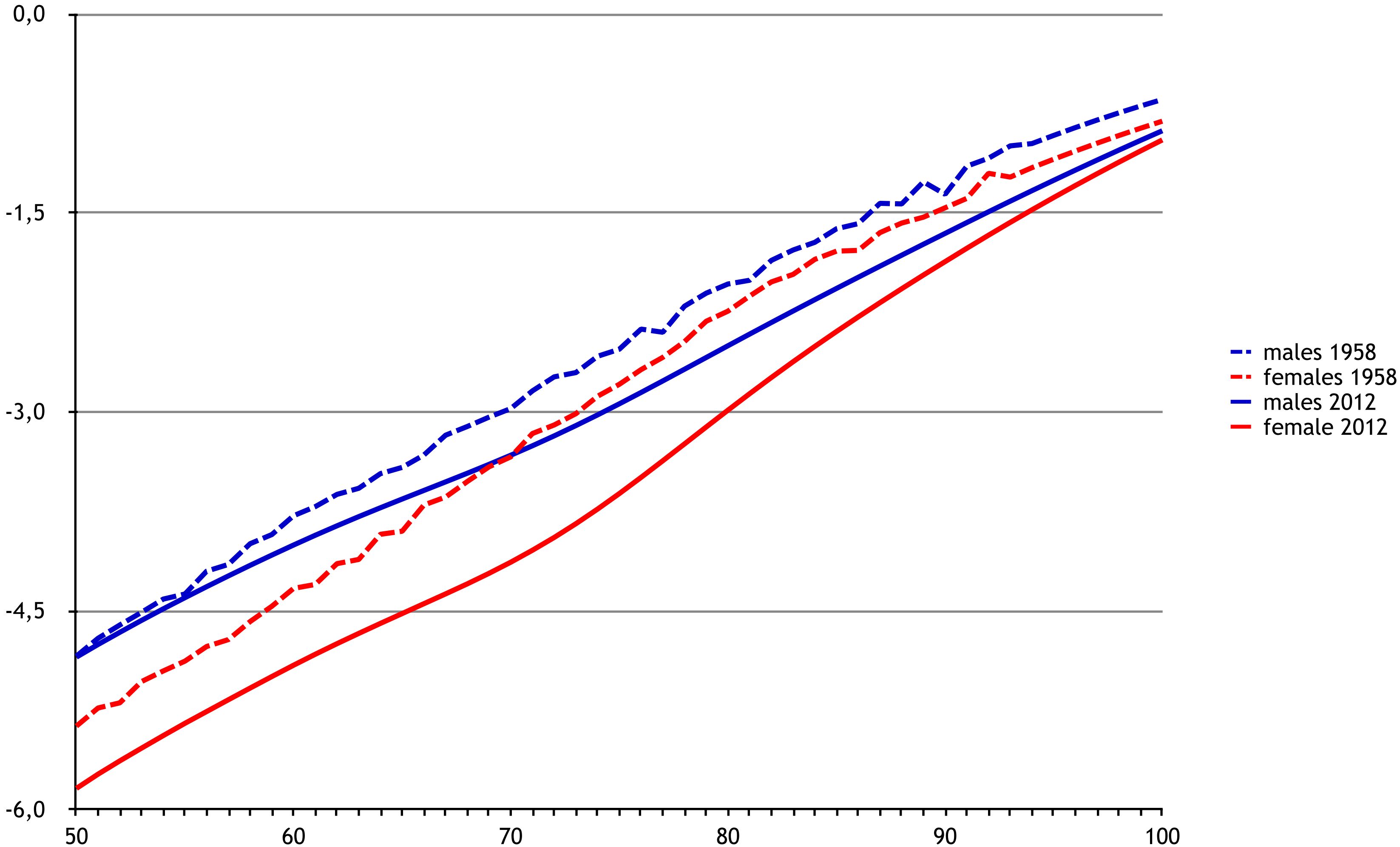
Wiek\rok	1958	1959	…	2012	2013	…
50			…		***?***	***?***
51			…		***?***	***?***
…	…	…	…	…	…	…
100			…		***?***	***?***

Umieralność na krańcach próbki (1)



Umieralność na krańcach próbki (2)

$\ln\{q(x,t)/[1-0.5q(x,t)]\}$



Standardowy model Lee-Cartera

- $$ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-0.5q_{x,t}}\right) = \alpha_x + \beta_x\kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$
  - W naszym przypadku:
    - $t = 1958, 1959, \dots, 2012$,
    - x$= 50, 51, \dots, 100$,
  - Wektor (51-elementowy) alfa reprezentuje średnią (w przekroju lat kalendarzowych) tablicę trwania życia
  - Wektor (55-elementowy) kappa to szereg czasowy efektów kalendarzowych reprezentujący ewolucję współczynników umieralności
  - Wektor (51-elementowy) beta reprezentuje strukturę wiekową efektu kalendarzowego
  - Epsilon to odchylenia indywidualne

Estymacja parametrów

- Standardowa metoda estymacji wektorów alfa, beta i kappa to MNK, a więc minimalizacja sumy kwadratów: $\sum_{x,t}\left\{ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-0.5q_{x,t}}\right)-\alpha_x+\beta_x\kappa_t\right\}^2$
- Przy ograniczeniach: $\sum_t \kappa_t = 0$, oraz $\sum_x \beta_x = 1$.

MNK ma walor optymalnej metody estymacji **o ile spełnione są założenia**:

- Wyrażenie $\{\alpha_x + \beta_x\kappa_t\}$, wyczerpuje to, co w zmianach umieralności ma charakter systematyczny;
- To co pozostaje, a więc składniki losowe $\varepsilon_{x,t}$ mają:
  - łączny rozkład normalny,
  - o zerowym wektorze wartości oczekiwanych
  - o identycznych wariancjach (niezależnych od x i t)
  - o zerowych kowariancjach (de facto więc niezależności wzajemnej poszczególnych $\varepsilon_{x,t}$)

Powyższe założenia mogą budzić mniejsze lub większe wątpliwości, (poza założeniem o zerowych wartościach oczekiwanych), a odpowiedzią jest pojawianie się alternatywnych modeli i/lub metod ich estymacji

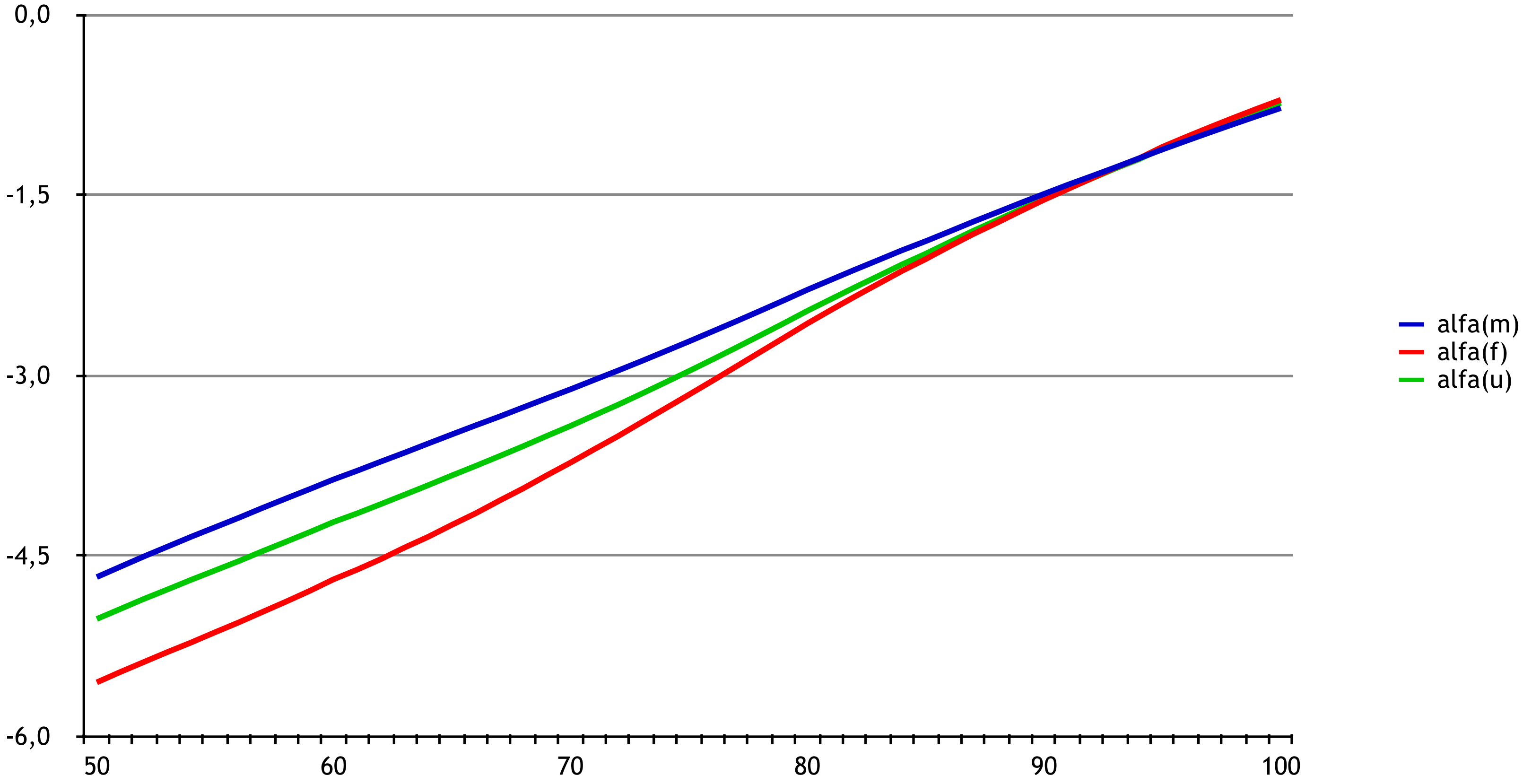
Ewolucja

- Analizę obserwowanej ewolucji tablic dopełnia dobór i estymacja parametrów modelu szeregu czasowego dla współczynników kappa.
- Najczęściej stosowany model to błądzenie przypadkowe z dryfem:
- $\kappa_t = \kappa_{t-1} + c + \eta_t,$
- gdzie o szeregu składników losowych η_t zakładamy iż są to niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym, zerowej wartości oczekiwanej, i identycznej wariancji, której wartość (tak jak i wartość parametru dryfu c) jest estymowana.
- Niekiedy stosowane są inne modele z klasy ARIMA.

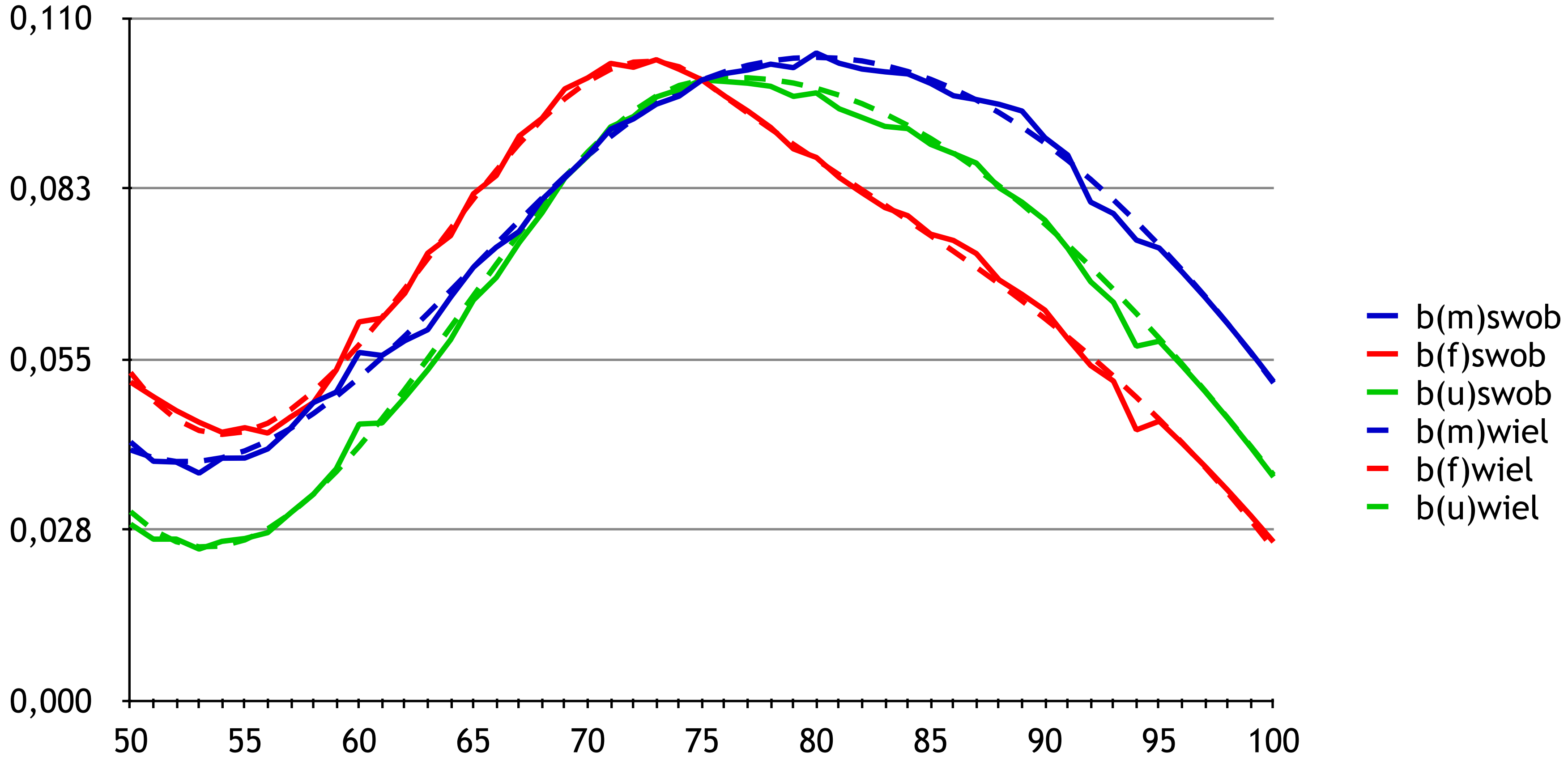
Istota modelu LC

- zamiast modelować ewolucję 51-wymiarowego szeregu czasowego (współczynniki dla wieku 50 lat, 51 lat, … , 100 lat)
- redukujemy to do jednowymiarowego szeregu czasowego kappa, służącego jako swojego rodzaju indeks charakteryzujący umieralność w roku kalendarzowym t.

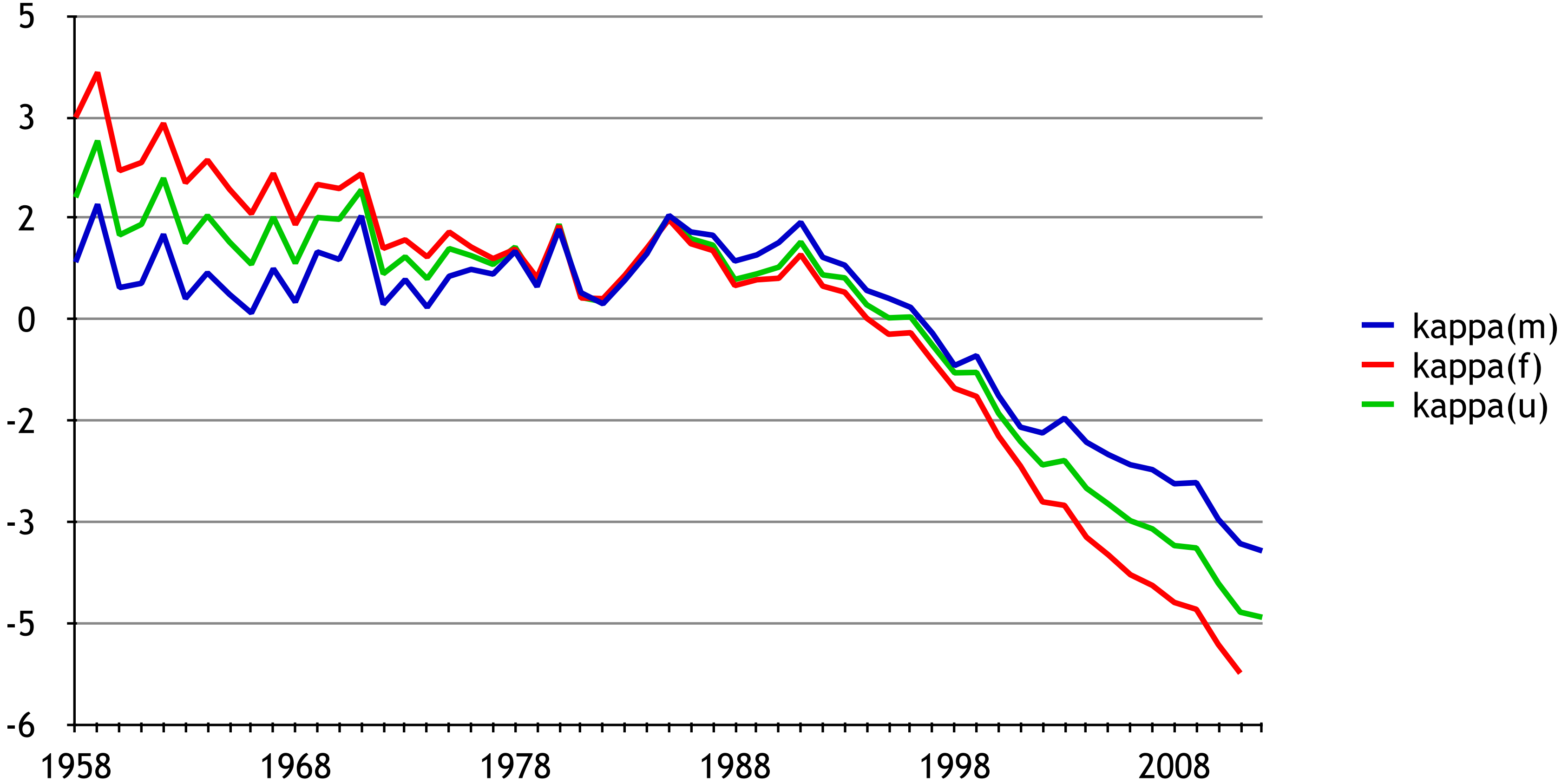
Wstępne oszacowania – wektory alfa



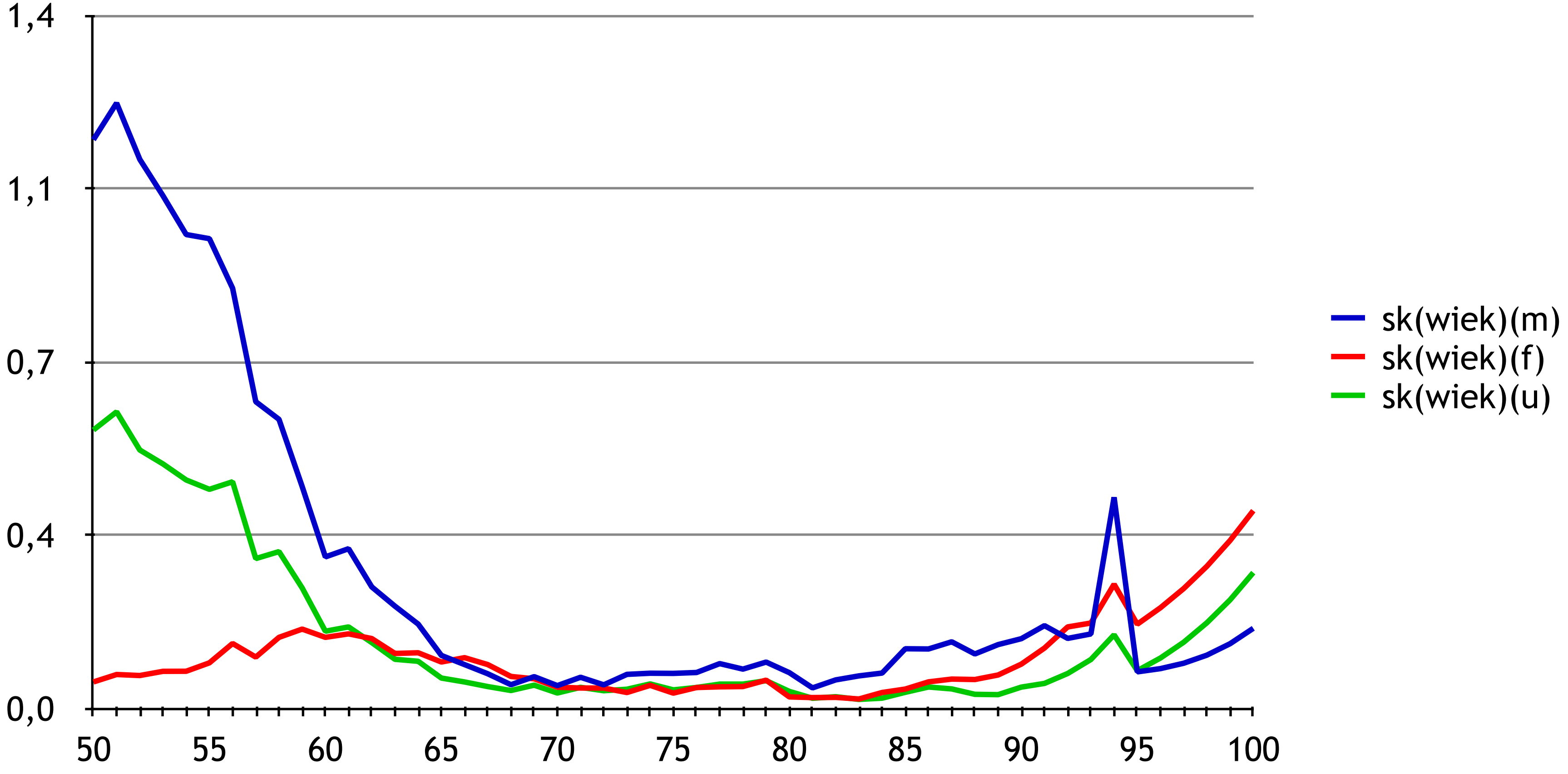
Wstępne oszacowania - wektory beta



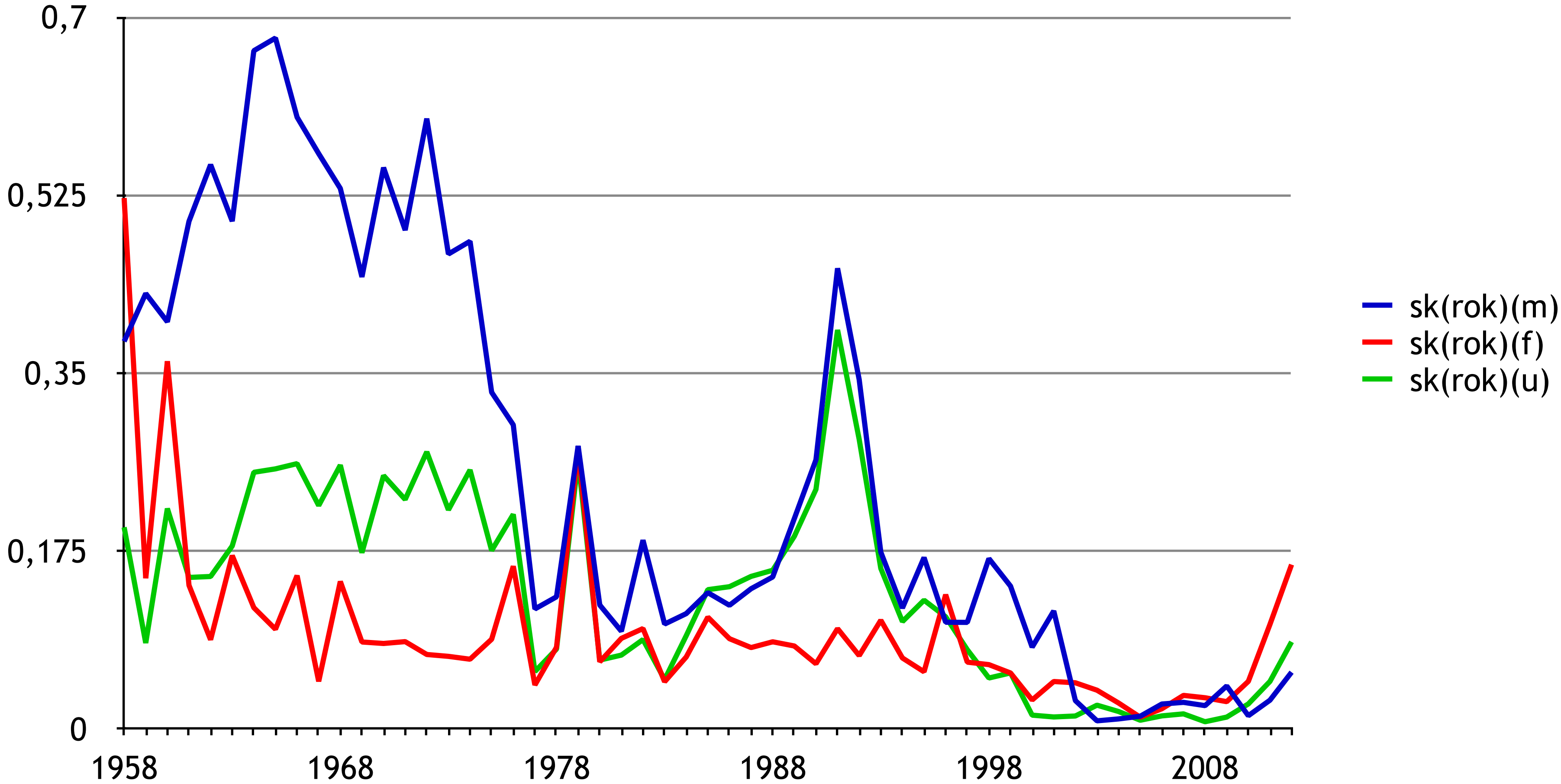
Wstępne oszacowania – wektory kappa



Wariancje składników losowych wg wieku



Wariancje składników losowych wg lat kalendarzowych



Analiza reszt

- Reszty z modelu (oszacowane wartości składników losowych $\varepsilon_{x,t}$) wykazują sprzeczne z założeniami własności. NP. dla mężczyzn:
- Korelacja $\varepsilon_{x,t}$ z $\varepsilon_{x-1,t}$ jest rzędu 0,85
- Korelacja $\varepsilon_{x,t}$ z $\varepsilon_{x,t-1}$ jest rzędu 0,84
- Korelacja $\varepsilon_{x,t}$ z $\varepsilon_{x-1,t-1}$ jest rzędu 0,81
- Dla kobiet korelacje są nieco niższe, ale wciąż szokująco niezgodne z założeniami modelu;
- Rozkład reszt jest wyraźnie leptokurtyczny (ma znacznie bardziej rozciągnięte ogony niż rozkład normalny)

Uogólnienie modelu Lee-Cartera: bogatsza specyfikacja

- Oznaczenie: $y_{x,t} := ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-0.5q_{x,t}}\right)$
- Model ogólny:

$$y_{x,t} = \alpha_x + (\beta 1)_x(\kappa 1)_t + (\beta 2)_x(\kappa 2)_t + (\beta 3)_x \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}$$

- W naszym przypadku:
  - $t = 1958, 1959, \ldots, 2012,$
  - x= $50, 51, \ldots, 100,$
- Wektor alfa reprezentuje średnią tablicę trwania życia
- Uwzględniamy dwa efekty roku kalendarzowego, z dynamiką daną szeregami kappa i strukturami wiekowymi danymi wektorami beta
- Wektor gamma (w naszym przypadku 105-elementowy) mierzy efekty kohortowe, ze struktura wiekową daną wektorem (beta3)
- Szczególne przypadki otrzymujemy nakładając ograniczenia na elementy poszczególnych wektorów, w szczególności wyłączając całkowicie poszczególne składowe

Uogólnienie modelu Lee-Cartera: autokorelacja składników losowych

- W modelu ogólnym:

$$y_{x,t} = \alpha_x + (\beta 1)_x(\kappa 1)_t + (\beta 2)_x(\kappa 2)_t + (\beta 3)_x\gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}$$

  - Nakładamy ograniczenia normujące na każdy z wektorów beta (np. suma elementów równa 1)
  - Oraz ograniczenia normujące na wektory kappa i gamma (np. suma elementów równa zeru)
- O składniku losowym zakładamy, że:
- $\varepsilon_{x,t} = \eta_{x,t} + \sum_{i,j} \rho_{i,j} \varepsilon_{x-i.t-j}$
  - Gdzie niezależnością charakteryzują się „innowacje" $\eta_{x,t}$, zaś drugi składnik prawej strony wzoru reprezentuje efekt autokorelacji ze składnikami losowymi z poprzednich lat kalendarzowych i sąsiednich grup wiekowych.
- Szacowano modele, w których założono że:
  - $i = -2, -1, \dots, 7$, oraz $j = 1,2, \dots, 6$ (umownie: model z autokorelacją 6-tego rzędu)
  - autokorelacja 5-tego rzędu: $i = -2, -1, \dots, 6$, oraz $j = 1,2, \dots, 5$
  - autokorelacja 4-tego rzędu: $i = -2, -1, \dots, 5$, oraz $j = 1,2, \dots, 4$
  - autokorelacja rzędu 3: $i = -2, -1, \dots, 4$, oraz $j = 1,2,3$
  - autokorelacja rzędu 2: $i = -2, -1, \dots, 3$, oraz $j = 1,2$
  - autokorelacja rzędu 1: $i = -2, -1, \dots, 2$, oraz $j = 1$
  - autokorelacja nie występuje

Problem heteroscedastyczności

- O innowacjach $\eta_{x,t}$ założono (poza ich wzajemną niezależnością), iż mają zerowe wartości oczekiwane i zróżnicowane wariancje, przy czym:
- $var\left(\eta_{x,t}\right) = \frac{\sigma^2{}_x \sigma^2{}_t}{\sigma^2}$
- Gdzie odpowiednie parametry to średnia wariancja dla wieku *x*, średnia wariancja dla roku kalendarzowego *t*, oraz średnia wariancja dla wszystkich obserwacji w próbce
- Powyższe podejście jest znaczącą alternatywą w stosunku do modeli znanych z literatury, w których wykorzystanie informacji o liczbie narażonych na zgon kryjących się za obserwacją współczynnika $q_{x,t}$ oraz przyjęcie założenia o rozkładzie Poissona (lub dwumianowego) dla obserwowanych liczb zgonów daje podobne rezultaty.
- Zaproponowane tutaj podejście (w istocie posiadające cechy wnioskowania nieparametrycznego) ma uzasadnienie szczególnie w przypadku, gdy materiałem badawczym są tablice narodowe sporządzane przez państwowe urzędy statystyczne

Estymacja parametrów

- Ostatecznie zastosowano Estymowaną Ważoną Metodę Najmniejszych Kwadratów, gdzie szuka się takich wartości elementów wektorów kappa1, kappa2, gamma, oraz wektorów beta1, beta2, i beta 3, oraz współczynników autokorelacji $\rho_{i,j}$, przy których minimum osiąga ważona suma kwadratów innowacji:
  - $\sum_{x,t}(\eta_{x,t})^2 w_{x,t}$
  - Gdzie $\mathrm{w}_{x,t} := (\sigma^2{}_x \sigma^2{}_t)^{-1}$,
  - Przy ograniczeniach normujących wektory parametrów kappa, gamma i beta.
- Standardowym sposobem postępowania jest tutaj procedura dwustopniowa:
  - Najpierw dokonujemy wstępnego oszacowania parametrów strukturalnych modelu, przyjmując tymczasem wagi równe
  - Na podstawie reszt ze wstępnego oszacowania dokonujemy oceny parametrów $\sigma^2{}_x$ oraz $\sigma^2{}_t$
  - Dokonujemy ponownie minimalizacji sumy kwadratów, tym razem ważonej, z użyciem wag opartych na wynikach oszacowania wstępnego

Wygładzanie wektorów beta

- Rozsądną redukcję liczby szacowanych parametrów można uzyskać wygładzając przebieg wektorów beta (szczególnie istotne przy bogatszych wersjach specyfikacji modelu)
- Przyjęto – zastosowaną we wszystkich wersjach modelu oprócz modelu z jednym efektem kalendarzowym – funkcję:
- $\beta_x = 0.1 + a(x-t) + b(x-t)^2 + c(x-t)^3$,
  - Z tym samym parametrem a dla $x = 50,51, \dots, 100$
  - Z odrębnymi wartościami parametrów b i c dla $x < 75$ i dla $x > 75$
- W efekcie: dla każdego z wektorów beta szacowano 5 parametrów zamiast 50 parametrów

Lista ocenianych modeli

- Ocenie porównawczej poddano następujące modele:
  - bez efektów
  - Z jednym efektem kalendarzowym (Lee Carter)
  - Z jednym efektem kalendarzowym i jednym kohortowym (Renshaw, Haberman)
  - Z dwoma efektami kalendarzowymi (wiele znanych prób zastosowania)
  - Z dwoma efektami kalendarzowymi i jednym kohortowym
- Model z jednym efektem kalendarzowym oszacowano w wersji klasycznej oraz w wersji z wygładzaniem wektora beta; modele z bogatszymi specyfikacjami oszacowano jedynie w wersji z wygładzonymi wektorami beta
- Wszystkie modele szacowano w wersjach z autokorelacją rządu 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6
- Wszystkie modele szacowano dla polskich tablic trwania życia mężczyzn, kobiet, oraz tzw. unisex
- Dodatkowo (jedynie w wersji z autokorelacją rzędu 4) oszacowano modele z dwoma efektami kalendarzowymi, i dodatkowymi ograniczeniami:
  - Wynikającymi z hipotezy iż mamy do czynienia z odrębnymi strukturami wiekowymi efektu kalendarzowego w podokresach 1958-1985 oraz 1986-2012
  - Wynikającymi z hipotezy iż mamy do czynienia z odrębną dynamiką zmian w czasie dotyczącą grup wiekowych 50-75 lat oraz 76-100 lat

Ilościowe kryteria oceny porównawczej

- Przyjęto dwa kryteria ilościowe
  - AIC (Akaike information Criterion), w uproszczonej wersji: $AIC := n \times \ln\left(\frac{SKW}{n}\right) + 2k$
  - BIC (Bayesian Inf. Crit.) Schwartza w uproszczonej wersji: $BIC := n \times \ln\left(\frac{SKW}{n}\right) + \ln(n) \times k$
  - Gdzie *n* to liczba obserwacji, *k* to liczba szacowanych parametrów, zaś *SKW* to ważona suma kwadratów reszt
- Zastosowanie tych kryteriów wymagało przyjęcia tego samego systemu wag w różnych wersjach porównywanych modeli. Wagi te przyjęto na podstawie modelu z dwoma efektami kalendarzowymi, jednym kohortowym, i autokorelacją 4 rzędu

Jakościowe kryterium oceny porównawczej

- Przyjęto, iż stosunkowo wysoka autokorelacja reszt (efekt zaburzenia w jednym roku i jednej grupie wiekowej pozostawia trwały ślad po wielu latach symulacji) jest świadectwem tego, iż specyfikacja modelu jest nazbyt uboga, i w efekcie składnik zaburzeń, który miał być „losowy", zawiera znaczącą porcję czegoś, co jest systematyczne
- Kryterium to nie w pełni daje się formalizować, jednak w przypadku analizowanych modeli można bez wątpliwości stwierdzić, który z nich je spełnia, a który nie.

Wyniki dla mężczyzn

	Kryterium informacyjne Akaike, mężczyźni						2cl: wiek	2cl: okres
rząd	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-	b-	b-	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.
0	8605	3693	3606	385	-398	-1937		
1	2089	-858	-905	-1511	-1139	-2188		
2	1758	-990	-1044	-1754	-1380	-2213		
3	1742	-1056	-1111	-1859	-1451	-2240		
4	1718	-1170	-1227	-1886	-1475	-2253	-1596	-1290
5	1719	-1166	-1224	-1888	-1514	-2255		
6	1705	-1170	-1227	-1897	-1566	-2243		
	Kryterium bayesowskie Schwartza, mężczyźni						2cl: wiek	2cl: okres
rząd	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-	b-	b-	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.
0	8908	4613	4259	1389	903	-286		
1	2421	92	-221	-477	191	-508		
2	2132	2	-319	-679	-9	-491		
3	2170	-10	-333	-731	-25	-464		
4	2211	-60	-384	-692	15	-412	-426	-411
5	2289	22	-304	-617	54	-336		
6	2365	107	-217	-537	91	-236		

Wyniki dla kobiet

	Kryterium informacyjne Akaike, kobiety						2cl: wiek	2cl: okres
rzad	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.
0	10550	1709	1633	29	-1062	-2209		
1	2116	-959	-984	-1659	-1473	-2291		
2	1706	-1224	-1207	-2013	-1639	-2325		
3	1700	-1289	-1287	-2130	-1654	-2330		
4	1688	-1305	-1314	-2156	-1657	-2324	-1694	-1349
5	1615	-1331	-1364	-2171	-1663	-2335		
6	1584	-1326	-1362	-2160	-1659	-2332		

	Kryterium bayesowskie Schwartza, kobiety						2cl: wiek	2cl: okres
rzad	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.	b-wielom.
0	10853	2630	2287	1033	238	-558		
1	2449	-8	-301	-625	-143	-610		
2	2080	-232	-482	-938	-267	-603		
3	2127	-243	-509	-1001	-229	-554		
4	2181	-194	-470	-962	-166	-483	-524	-470
5	2185	-143	-443	-900	-95	-416		
6	2243	-49	-352	-800	-2	-324		

Wyniki dla tablic wspólnych

	Kryterium informacyjne Akaike, tablice wspólne						2cl: wiek	2cl: okres
rzad	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-	b-	b-	b-wielom.	b-	b-
0	10085	2832	2749	-129	-875	-2313		
1	2399	-1221	-1285	-1877	-1533	-2572		
2	1973	-1367	-1434	-2171	-1710	-2640		
3	1965	-1460	-1527	-2257	-1746	-2663		
4	1960	-1542	-1615	-2287	-1766	-2677	-2000	-1646
5	1884	-1544	-1619	-2307	-1796	-2685		
6	1874	-1549	-1623	-2321	-1808	-2669		
	Kryterium bayesowskie Schwartza, tablice wspólne						2cl: wiek	2cl: okres
rzad	bez	1 kalend		2 kalend	kal+koh	2kal+koh	75/76	1985/86
autokor.	efektów	b-swob.	b-	b-	b-	b-wielom.	b-	b-
0	10388	3752	3402	875	425	-662		
1	2731	-271	-602	-843	-203	-892		
2	2347	-375	-709	-1096	-338	-918		
3	2393	-415	-749	-1129	-320	-888		
4	2453	-431	-772	-1094	-275	-836	-830	-767
5	2454	-356	-698	-1036	-228	-767		
6	2533	-272	-614	-961	-151	-661		

Pomiar trwałości efektów losowych

- Zakładamy iż w roku $t = 0$ składnik losowy $\varepsilon_{55,0}$ =50, zaś wszystkie pozostałe $\varepsilon_{x,0}$ wynoszą minus jeden.
- Liczymy składniki losowe w latach następnych $t = 1,2,3, \ldots$ zakładając, iż innowacje $\eta_{x,t}$ są równe zeru, przyjmując oszacowane dla danego modelu współczynniki autokorelacji $\rho_{i,j}$.
- Obserwujemy, czy i jak szybko maleje (w miarę wzrostu *t*) suma kwadratów odchyleń $\sum_x (\varepsilon_{x,t})^2$

Trwałość ef. los. – wyniki dla mężczyzn

Bez ef.	horyzont	acorr 6	acorr 5	acorr 4	acorr 3	acorr 2	acorr 1	
MSE^0.5	20	3	3	3	3	3	3	
MSE^0.5	40	5	5	5	5	5	4	
MSE^0.5	60	10	10	11	12	12	8	
cal, b-swob								
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	2	
MSE^0.5	40	3	2	2	2	2	2	
MSE^0.5	60	3	3	3	3	3	3	acor 4
cal, b-wiel.								wiek 75/76
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	2	2
MSE^0.5	40	2	2	2	2	2	2	3
MSE^0.5	60	2	2	2	3	3	2	5
2cal, wiel.								
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	2	
MSE^0.5	40	3	3	3	3	3	2	
MSE^0.5	60	5	6	6	6	4	3	acor 4
cal+coh, wiel.								okres 85/86
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	0	2
MSE^0.5	40	4	3	3	3	2	0	3
MSE^0.5	60	3	3	2	3	3	0	4
2cal+coh,								
MSE^0.5	20	0,022	0,007	0,001	0,001	0,001	0,000	
MSE^0.5	40	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
MSE^0.5	60	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Trwałość ef. los. – wyniki dla kobiet

Bez ef.	horyzont	acorr 6	acorr 5	acorr 4	acorr 3	acorr 2	acorr 1	
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	3	
MSE^0.5	40	3	3	4	4	4	5	
MSE^0.5	60	6	6	7	7	8	8	
cal, b-swob								
MSE^0.5	20	5	5	5	4	4	3	
MSE^0.5	40	19	19	20	16	10	5	
MSE^0.5	60	24	24	34	36	32	9	acor 4
cal, b-wiel.								wiek 75/76
MSE^0.5	20	4	4	5	4	4	3	5
MSE^0.5	40	16	17	19	15	10	4	23
MSE^0.5	60	9	8	6	10	21	6	15
2cal, wiel.								
MSE^0.5	20	1	1	1	1	1	0	
MSE^0.5	40	1	1	1	1	0	0	
MSE^0.5	60	0	0	0	0	0	0	acor 4
cal+coh, wiel.								okres
MSE^0.5	20	0	0	0	0	0	0	5
MSE^0.5	40	0	0	0	0	0	0	16
MSE^0.5	60	0	0	0	0	0	0	3
2cal+coh,								
MSE^0.5	20	0,063	0,031	0,001	0,000	0,000	0,000	
MSE^0.5	40	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	
MSE^0.5	60	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Trwałość ef. los. - wyniki unisex

Bez ef.	horyzont	acorr 6	acorr 5	acorr 4	acorr 3	acorr 2	acorr 1	
MSE^0.5	20	2	2	3	3	3	3	
MSE^0.5	40	4	5	5	5	6	6	
MSE^0.5	60	8	9	11	12	13	12	
cal, b-swob								
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	2	
MSE^0.5	40	3	3	3	3	3	3	
MSE^0.5	60	3	3	3	4	4	4	acor 4
cal, b-wiel.								wiek 75/76
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	2	2
MSE^0.5	40	3	3	3	3	3	3	3
MSE^0.5	60	3	3	3	3	4	4	4
2cal, wiel.								
MSE^0.5	20	3	4	3	3	3	2	
MSE^0.5	40	10	9	5	5	5	3	
MSE^0.5	60	23	21	12	12	11	5	acor 4
cal+coh, wiel.								okres
MSE^0.5	20	2	2	2	2	2	0	2
MSE^0.5	40	3	2	1	2	2	0	3
MSE^0.5	60	1	1	1	2	2	0	4
2cal+coh,								
MSE^0.5	20	0,038	0,016	0,006	0,002	0,001	0,000	
MSE^0.5	40	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
MSE^0.5	60	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	