



BANK  
GOSPODARSTWA  
KRAJOWEGO



# Matematyczna filozofia IRB

Michał Motoczyński  
Departament Ryzyka Finansowego

2009-05-28

## Kluczowe założenia do modelu IRB:

1. Dwa rodzaje ryzyka mające wpływ na pojedynczą ekspozycję:
  - ryzyko systematyczne (systematic risk) – ryzyko gospodarki, ma wpływ na prawdopodobieństwo defaultu klienta (PD). Ryzyko jest niedywersyfikowalne.
  - ryzyko specyficzne (idiosyncratic risk) – ryzyko związane bezpośrednio z klientem, ma wpływ na stratę na ekspozycji (LGD oraz EAD). Ten rodzaj ryzyka jest dywersyfikowalny.
2. Występuje tylko jeden czynnik ryzyka systematycznego – ogólny stan gospodarki wspólny dla wszystkich.
3. Wpływ ryzyka systematycznego:
  - każda ekspozycja jest w ten sposób uzależniona od czynnika ryzyka systematycznego – identyczny współczynnik korelacji
  - korelacja pomiędzy pojedynczymi ekspozycjami w portfelu jest stała i wyjaśniona wpływem tylko i wyłącznie ryzyka systematycznego – dywersyfikacja ryzyka specyficznego.
4. Portfel w stosunku do którego stosujemy metodę wewnętrznych ratingów jest bardzo rozdrobniony - nie ma istotnych koncentracji w portfelu – dywersyfikacja ryzyka specyficznego.

## **Kluczowy warunek stosowalności metod IRB do wyznaczania wymogów kapitałowych:**

**Model powinien mieć własność niezmienniczości względem portfela – portfolio invariance, tj:**

- 1. Kapitał alokowany do portfela na pokrycie ryzyka kredytowego zależy tylko od samej ekspozycji, a nie od portfela do którego ekspozycja trafia.**
- 2. Dzięki tej własności do wyznaczenia kapitału wymaganego na pokrycie ryzyka w portfelu wystarczy wyznaczyć kapitał dla każdej ekspozycji, a następnie wyniku zsumować**
- 3. Aby określić kapitał na pokrycie ryzyka dla danej ekspozycji wystarczy wyznaczyć dla danego klienta/transakcji parametry PD, LGD oraz EAD.**
- 4. Własność modelu portfolio invariant leży u podstaw IRB, aby metoda była możliwa do zastosowania w praktyce.**
- 5. Bazylea 1 miała tę własność, Bazylea 2 metoda standardowa ma tę własność, IRB też.**

## Zasady ogólne

- Z wyliczeń kwoty ważonej ryzykiem (wymogów kapitałowych) wyłączone ekspozycje pomniejszające fundusze własne ( 13)
- Można stosować własne oszacowania PD – metoda podstawowa (FIRB), lub dodatkowo własne oszacowania LGD, EAD – metoda zaawansowana (AIRB)
- Im wyższy rating podmiotu (niższe PD), tym wyższa jest korelacja w stosunku do czynnika ryzyka systematycznego.
- Kwoty oczekiwanych strat obliczane jako  $EL = EAD * PD * LGD$  – pokrycie w rezerwach.
- Kwoty nieoczekiwanych strat obliczane jako  $UL = EAD * RW$  – pokrycie w kapitale.
- (RW – waga ryzyka – nieoczekiwana strata od nominalu równego 1).



## Model Mertona:

$$dA_{it} = \mu_i A_{it} dt + \sigma_i A_{it} dW_{it}$$

gdzie  $A$  – aktywa firmy  $i$ -tej,  $W$  – proces Wienera.

Wtedy dla ustalonego  $T$ , przyrost wartości aktywów do czasu  $T$  ma rozkład lognormalny

$$\ln(A_{iT}) = \ln(A_{i0}) + \mu_i T - \frac{1}{2} \sigma_i^2 T + \sigma_i \sqrt{T} \cdot U_i$$

zmienna  $U_i$  – ma rozkład  $N(0,1)$ . Stąd prawdopodobieństwo defaultu w chwili  $T$

$$p_i = P(A_{iT} < B_i) = P(U_i < c_i) = N(c_i)$$

**Vasicek, “The Distribution of Loan Portfolio Value”  
RISK 12/2002.**

**Zakładamy dla uproszczenia, że w portfelu mamy kredyty każdy w kwocie równej 1 oraz że każdy klient ma takie samo prawdopodobieństwo defaultu  $p_i=p$ , a zmienne aktywów w obu firmach są skorelowane ze współczynnikiem  $\rho$  - jedno z kluczowych założeń dla IRB, które mówi, że w danym portfelu (klasie ratingowej) mam bardzo podobnych klientów.**

**Niech  $L_i$  – zmienna oznaczająca stratę (przed odzyskiem), taka że  $L_i=1$  – klient wpada w default,  $L_i=0$  – brak defaultu. Wtedy**

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i$$

**oznacza procentową stratę na portfelu. Zmienne  $U_i$  mają standardowe rozkłady normalne, parami skorelowane ze współczynnikiem  $\rho$ .**

Wtedy

$$U_i = Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho}$$

gdzie  $Y, Z_1, \dots, Z_n$  są iid  $N(0,1)$ . Zmienna  $Y$  oznacza wpływ ryzyka systematycznego na zwrot na aktywach kredytobiorcy, a  $Z_i$  – ryzyko specyficzne  $i$ -tego klienta,

**PD** – prawdopodobieństwo defaultu w horyzoncie 1 roku. **PD(Y)** – warunkowe prawdopodobieństwo defaultu w horyzoncie 1 roku, czyli

$$PD(Y) = P(L_i = 1|Y) = P(Y\sqrt{\rho} + Z_i\sqrt{1-\rho} < c_i|Y) = N\left[\frac{N^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

Warunkowo od  $Y$ , zmienne  $L_i$  są iid o skończonej wariancji, więc warunkowo względem  $Y$  zmienna  $L$  dąży w nieskończoności (MPWL) do swojej wartości oczekiwanej, czyli **PD(Y)**.

**Stąd asymptotycznie**

$$P(L \leq x) = P(PD(Y) \leq x) = P(Y \geq PD^{-1}(x)) = N(-PD^{-1}(x))$$

**Ostatecznie mamy**

$$P(L \leq x) = N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho} \cdot N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right]$$

**Wielkość  $x$  w powyższym wzorze to mityczny VaR, czyli poziom straty, którego nie chcielibyśmy przekroczyć przy z góry określonym poziomie  $p$ -stwa.**

**W IRB ten poziom został określony na 0,999. Dlatego**

$$N \left[ \frac{\sqrt{1-\rho} \cdot N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}} \right] = 0,999$$

**i w konsekwencji**



$$VaR = N \left[ \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho} \cdot N^{-1}(0,999)}{\sqrt{1 - \rho}} \right]$$

Po skorygowaniu o odzysk LGD i odjęciu straty oczekiwanej mamy

$$UL = LGD \cdot N \left[ \frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho} \cdot N^{-1}(0,999)}{\sqrt{1 - \rho}} \right] - PD \cdot LGD$$

Tyle model opisany w pracy Vasicka.

### **Komentarz:**

- 1. Założenie o równej kwocie kredytów w portfelu u Vasicka jest czysto techniczne – można je osłabić.**
- 2. W 2002 Gordy publikuje pracę „A risk-factor model foundation for ratings-based capital rules” – gdzie definiuje ASRF model (asymptotic single risk factor model)**
- 3. Autor przy pewnych niezbyt silnych założeniach odnośnie składu portfela (podobni klienci oraz zależność pomiędzy ekspozycjami jest wyjaśniana przez jeden czynnik ryzyka systematycznego) uzyskuje w modelu pożądaną własność portfolio invariance.**
- 4. W celu zaadoptowania powyższego wzoru na potrzeby IRB, dokonano jeszcze kilku modyfikacji polegających na kalibracji parametrów wzoru do danych rynkowych – korelacja oraz poprawka termin zapadalności.**

### **Poprawka na termin zapadalności:**

- 1. ekspozycje o dłuższym terminie mają wyższe ryzyko – możliwe pogorszenie sytuacji klienta w przyszłości**
- 2. ekspozycje o niższym PD rocznym powinny mieć mniejszą korektę z tytułu terminu zapadalności.**

### **Korekta:**

$$\frac{1 + (M - 2,5) \cdot b}{1 - 1,5 \cdot b}$$

gdzie,

**b =  $(0,11852 - 0,05478 \cdot \ln(\text{PD}))^2$**  - współczynnik terminu zapadalności;

**M** – termin zapadalności wyrażony w latach, wyznaczany jako średni czas do zapadalności, ale nie więcej niż 5 lat i nie mniej niż 1 rok.

Skalibrowane do wyników  $\text{VaR}(\text{PD}, \text{Maturity})$  z modelu KMV, w odniesieniu do standardowego terminu 2,5 roku.

### Korekta terminu zapadalności:

		M				
PD	b	1	2	3	4	5
0,2%	0,003	1	1,003	1,005	1,008	1,011
0,5%	0,034	1	1,036	1,072	1,108	1,145
1%	0,055	1	1,060	1,120	1,179	1,239
2%	0,073	1	1,081	1,163	1,244	1,326
5%	0,092	1	1,106	1,212	1,319	1,425
10%	0,103	1	1,121	1,243	1,364	1,485
15%	0,108	1	1,128	1,257	1,385	1,514
20%	0,111	1	1,133	1,266	1,398	1,531
25%	0,113	1	1,136	1,271	1,407	1,543
30%	0,114	1	1,138	1,276	1,413	1,551
35%	0,115	1	1,139	1,279	1,418	1,557
40%	0,116	1	1,140	1,281	1,421	1,562
50%	0,117	1	1,142	1,284	1,426	1,568
100%	0,119	1	1,144	1,288	1,432	1,577



**Ujęcie IRB w regulacjach – Uchwała KNF 380/2008 z 17/12/2008, załącznik nr 5**

**ZASTOSOWANIE METODY WEWNĘTRZNYCH RATINGÓW DO OBLICZANIA WYMOGU KAPITAŁOWEGO Z TYTUŁU RYZYKA KREDYTOWEGO**

**Zgodnie z § 6 załącznika nr 5 do Uchwały KNF, ekspozycje w metodzie IRB dzielimy na następujące klasy:**

- ekspozycje lub ekspozycje warunkowe wobec rządów i banków centralnych;
- ekspozycje lub ekspozycje warunkowe wobec instytucji;
- ekspozycje lub ekspozycje warunkowe wobec przedsiębiorców;
- ekspozycje detaliczne lub warunkowe ekspozycje detaliczne;
- ekspozycje kapitałowe;
- pozycje sekurytyzacyjne;
- inne aktywa niebędące ekspozycjami kredytowymi.

### Warunki klasyfikacji do detalu (§ 6):

- jest to zaangażowanie wobec osoby lub osób fizycznych albo wobec małego lub średniego przedsiębiorcy, przy czym za małego lub średniego przedsiębiorcę należy uznać podmiot spełniający co najmniej jedno z następujących kryteriów:
  - roczny obrót netto nie przekroczył w co najmniej jednym z dwóch ostatnich lat obrotowych równowartości w złotych kwoty 50.000.000 euro, przeliczonej według kursu średniego ogłaszanego przez Narodowy Bank Polski, obowiązującego w dniu sporządzenia bilansu przedsiębiorcy,
  - suma aktywów bilansu na koniec co najmniej jednego z dwóch ostatnich lat nie przekroczyła równowartości w złotych kwoty 43.000.000 euro, przeliczonej według kursu średniego ogłaszanego przez Narodowy Bank Polski, obowiązującego w dniu sporządzenia bilansu przedsiębiorcy;
- w przypadku małego lub średniego przedsiębiorcy, całkowita kwota, którą dłużnik lub grupa powiązanych dłużników jest winna bankowi nie może przekraczać 1 mlnEUR;
- ekspozycje te są traktowane w procesie zarządzania ryzykiem banku w sposób konsekwentny jednolity;
- nie są zarządzane równie indywidualnie, jak ekspozycje zaliczane do klasy ekspozycji wobec przedsiębiorców;
- każda ekspozycja stanowi jedną ze znacznej liczby podobnie zarządzanych ekspozycji.

## OBLICZANIE KWOT EKSPOZYCJI WAŻONYCH RYZYKIEM

**Ekspozycje wobec przedsiębiorców, instytucji, rządów i banków centralnych (§ 17)**

**Korelacja:**

$$(R) = 0,12 \cdot \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD)}{1 - \exp(-50)} + 0,24 \cdot \left[ 1 - \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD)}{1 - \exp(-50)} \right]$$

**Waga ryzyka:**

$$RW = \left[ LGD \cdot N \left( \sqrt{\frac{1}{1-R}} \cdot N^{-1}(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \cdot N^{-1}(0,999) \right) - PD \cdot LGD \right] \cdot \frac{1 + (M - 2,5) \cdot b}{1 - 1,5 \cdot b} \cdot 12,5 \cdot 1,06,$$

M – termin zapadalności wyrażony w latach, wyznaczany jako średni czas do zapadalności, ale nie więcej niż 5 lat i nie mniej niż 1 rok.

Wartość PD w przypadku ekspozycji wobec przedsiębiorców lub instytucji wynosi co najmniej 0,03% (§ 80).

**Korelację dla ekspozycji wobec przedsiębiorców można korygować** w przypadku gdy całkowita roczna wartość sprzedaży w ujęciu skonsolidowanym dla grupy kapitałowej, w które skład wchodzi ten przedsiębiorca nie przekracza równowartości w złotych kwoty 50 mln EUR (§ 23).

$$R = 0,12 \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD)}{1 - \exp(-50)} + 0,24 \cdot \left[ 1 - \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD)}{1 - \exp(-50)} \right] - 0,04 \cdot \left( 1 - \frac{S - 5}{45} \right),$$

gdzie S oznacza wyrażoną w milionach euro (w celu podstawienia do wzoru) równowartość kwoty całkowitej sprzedaży rocznej i spełnia zależność:

$$5 \leq S \leq 50$$

Wartość sprzedaży niższa niż kwota równowartości w złotych 5.000.000 euro jest traktowana jako kwota równowartości 5.000.000 euro.



### Ekspozycje detaliczne (§ 34)

$$(R) = 0,03 \cdot \frac{1 - \exp(-35 \cdot PD)}{1 - \exp(-35)} + 0,16 \cdot \left[ 1 - \frac{1 - \exp(-35 \cdot PD)}{1 - \exp(-35)} \right],$$

Waga ryzyka

$$RW = \left[ LGD \cdot N \left( \sqrt{\frac{1}{1-R}} \cdot N^{-1}(PD) + \sqrt{\frac{R}{1-R}} \cdot N^{-1}(0,999) \right) - PD \cdot LGD \right] \cdot 12,5 \cdot 1,06,$$

Nie ma poprawki na termin zapadalności.

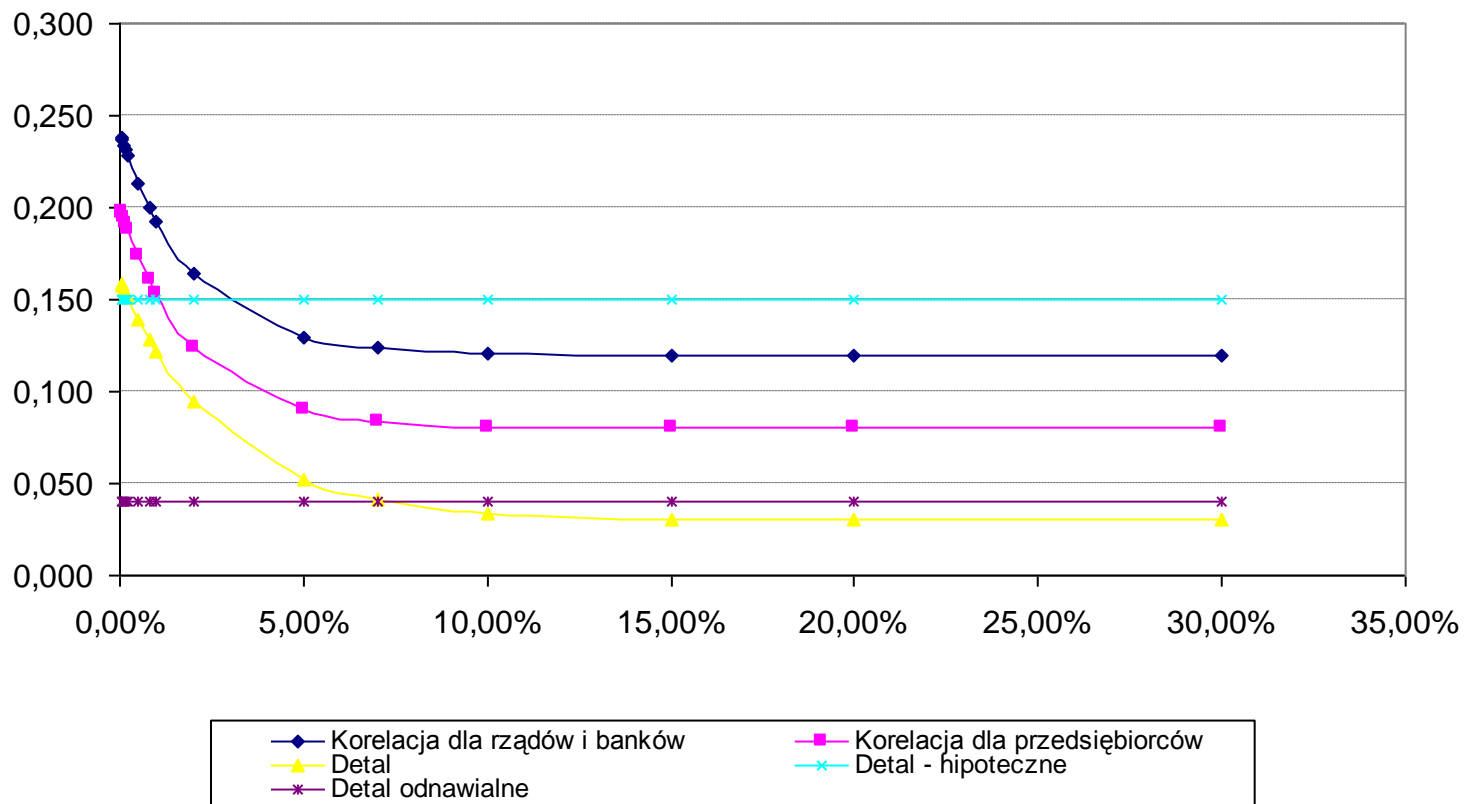
W przypadku ekspozycji detalicznych zabezpieczonych na nieruchomościach (§ 38), korelacja (R) wynosi 0,15 – ekspozycje w kredytach hipotecznych są bardziej skorelowane ze stanem gospodarki.

W przypadku odnawialnych ekspozycji detalicznych (§ 39), wartość korelacji (R) wynosi 0,04 – mniejsza zależność od wstrząsów gospodarczych.

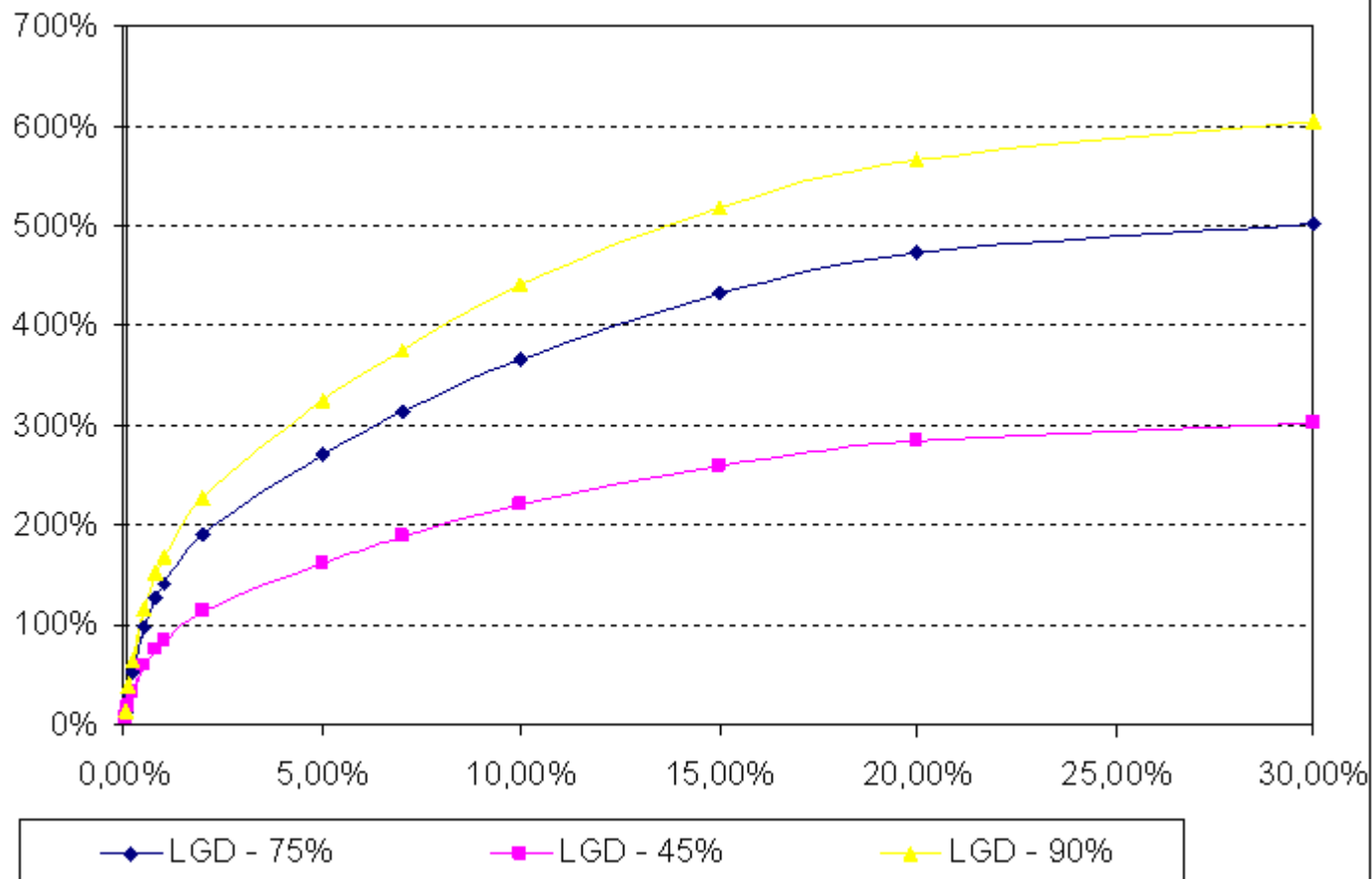
Wartość PD dla ekspozycji detalicznych wynosi co najmniej 0,03% (§ 97).

Kategorie ekspozycji	Metoda IRB	Stosowanie parametrów, modyfikacje
<ul style="list-style-type: none"> <li>•Należności od rządów</li> <li>•Należności od banków</li> </ul>	podstawowa	Oszacowanie własne: PD Wyznaczone przez nadzór: LGD, EAD, M.
	zaawansowana	Oszacowanie własne: PD, LGD, EAD, M.
Ekspozycje wobec przedsiębiorstw	podstawowa	Oszacowanie własne: PD Wyznaczone przez nadzór: LGD, EAD, M. Korekta korelacji R.
	zaawansowana	Oszacowanie własne: PD, LGD, EAD, M. Korekta korelacji R.
Ekspozycje detaliczne	podstawowa = zaawansowana	Oszacowanie własne: PD, LGD, EAD. Brak poprawki M. Korelacja R uzależniona od rodzaju ekspozycji.

### Korelacje w zależności od PD dla różnych ekspozycji

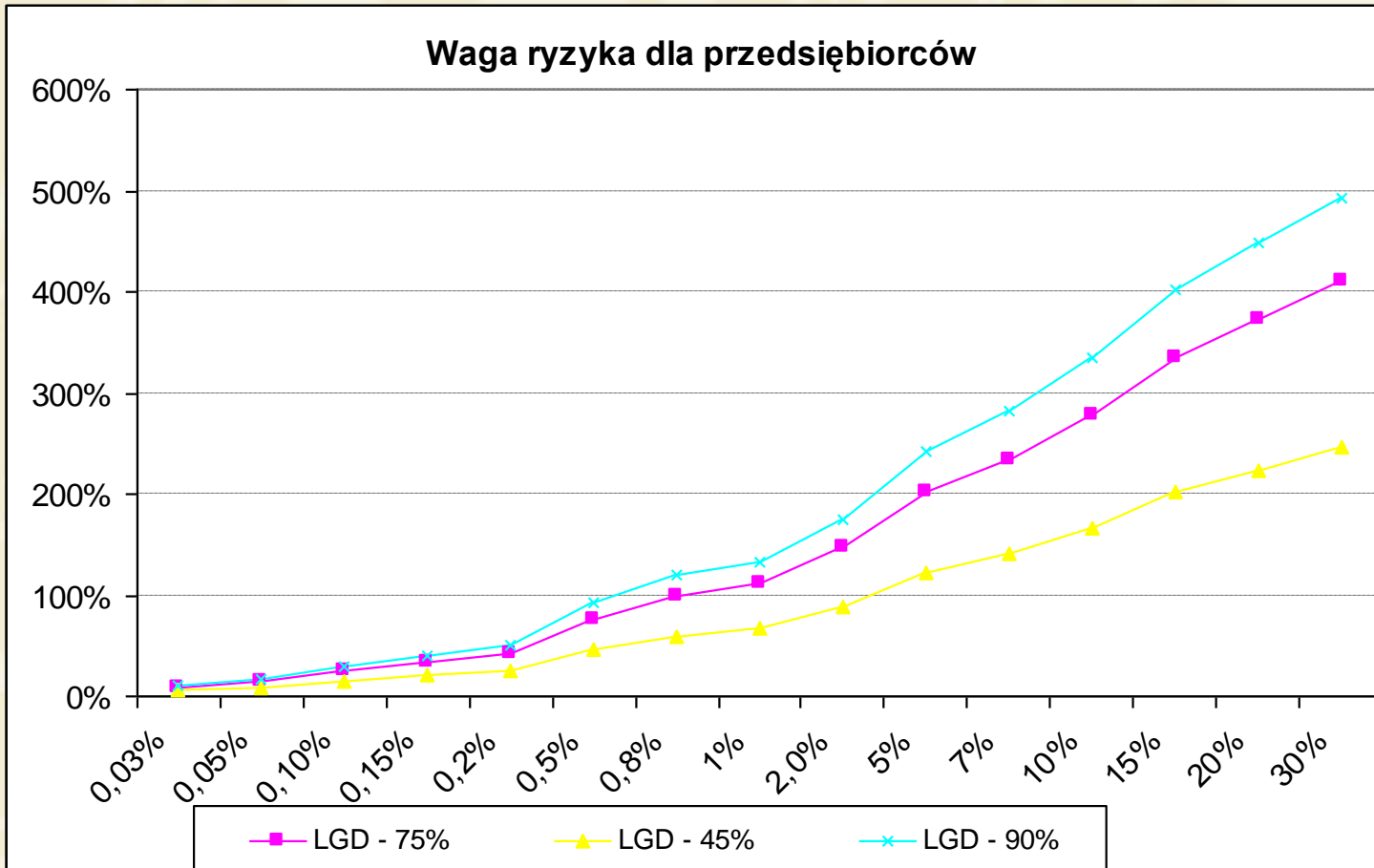


**Waga ryzyka dla należności od rządów i banków**

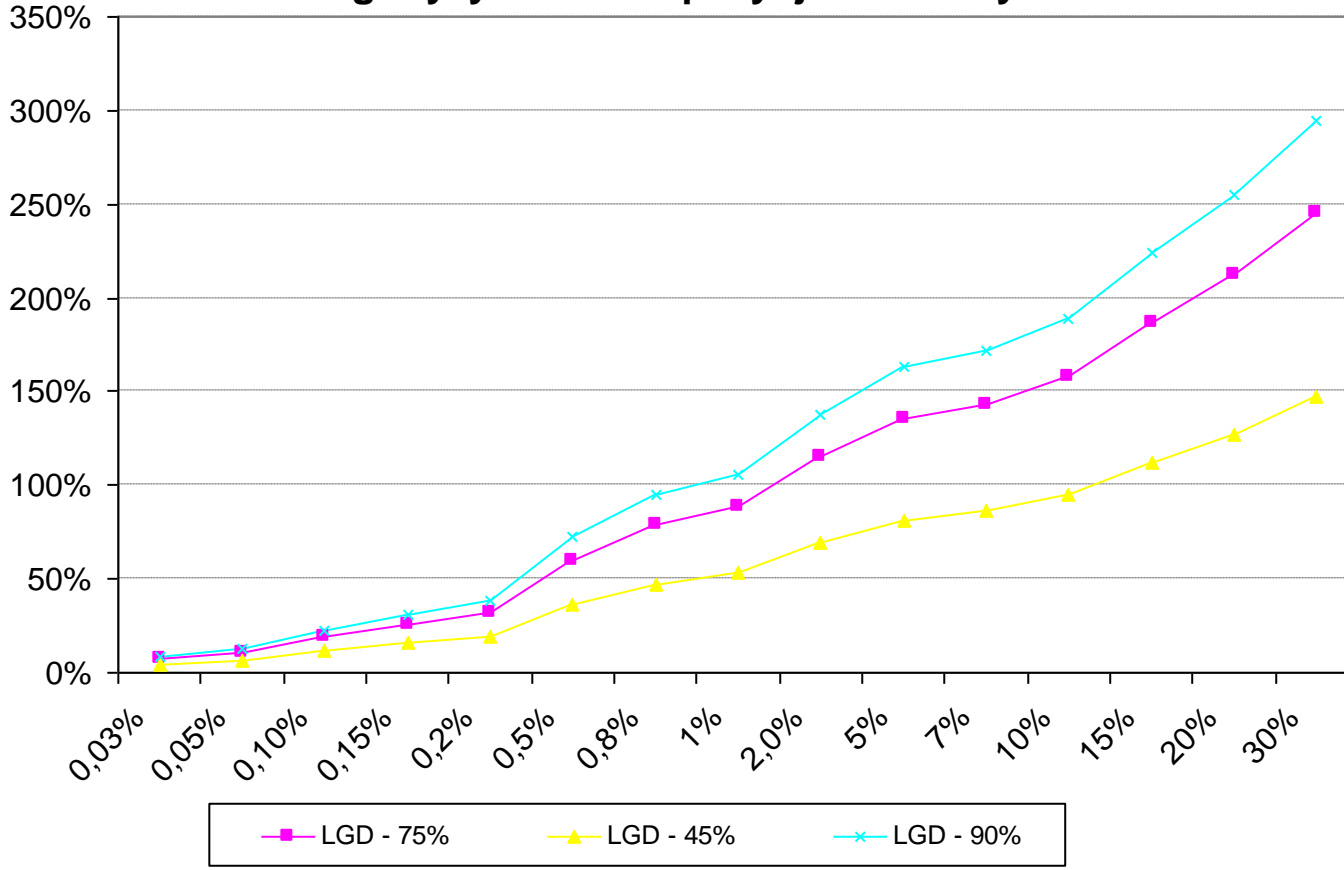




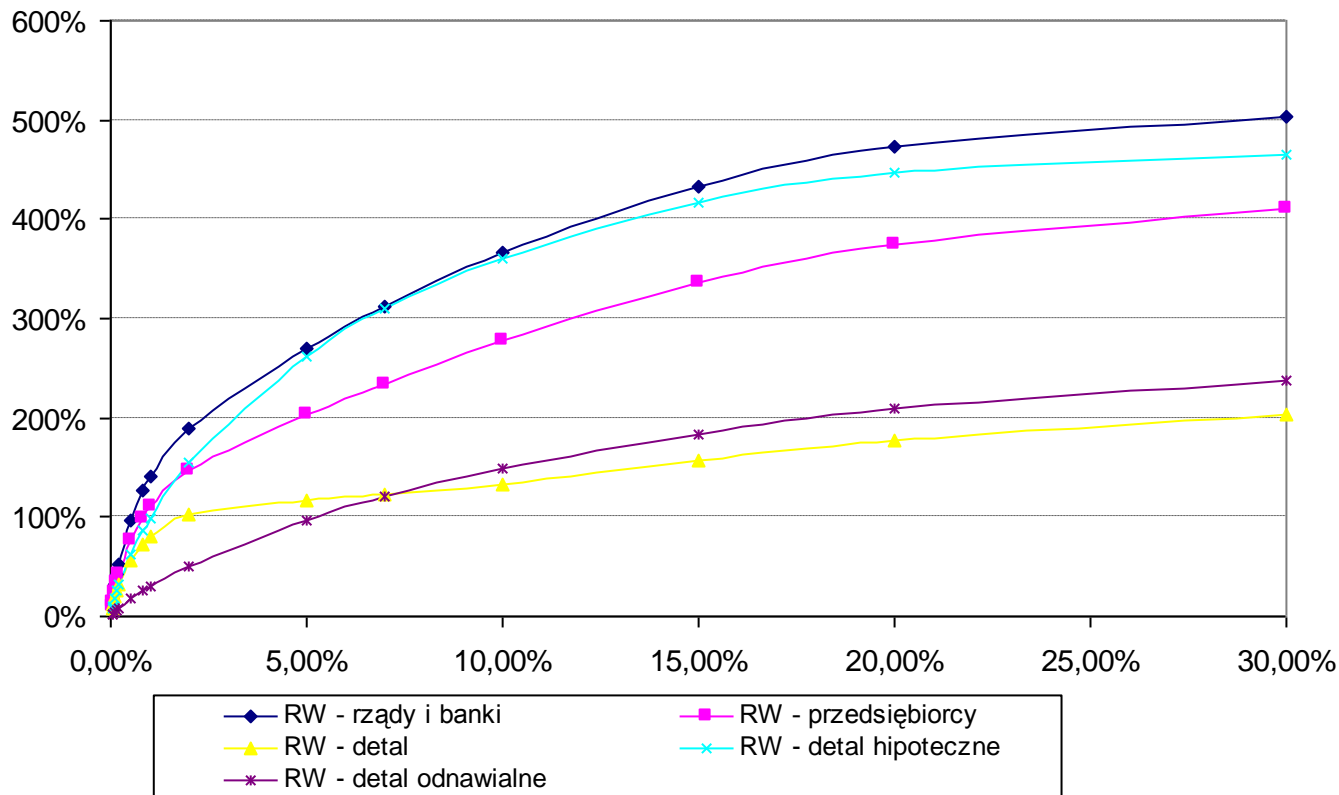
### Waga ryzyka dla przedsiębiorców



### Waga ryzyka dla ekspozycji detalicznych



### Zależność wagi ryzyka od PD dla różnych ekspozycji





## Bank stosuje metody wewnętrznych ratingów po uzyskaniu zgody KNF (§2)

KNF warunkuje wydanie zgody od następujących czynników (min):

- systemy ratingowe banku pozwalają na pełną ocenę charakterystyki dłużnika i transakcji - szacowanie miar ryzyka;
- wewnętrzne ratingi, oszacowania dotyczące niewykonania zobowiązań oraz strat - kluczowa rolę w procesie zarządzania ryzykiem i procesie decyzyjnym, jak również w procesie udzielania kredytów, wewnętrznej alokacji kapitału;
- bank stosował dany system ratingowy dla celów pomiaru i zarządzania ryzykiem kredytowym przez okres co najmniej trzech lat;
- w przypadku banku zamierzającego stosować własne oszacowania strat z tytułu niewykonania zobowiązań (LGD) i współczynników konwersji, bank stosował własne oszacowania strat z tytułu niewykonania zobowiązań (LGD) i współczynników konwersji dla celów pomiaru i zarządzania ryzykiem kredytowym przez okres co najmniej trzech lat;
- w banku istnieje niezależna komórka kontroli ryzyka kredytowego odpowiedzialna za systemy ratingowe;
- bank gromadzi i przechowuje wszystkie odpowiednie dane - wsparcie procesów pomiaru oraz zarządzania ryzykiem kredytowym;
- bank dokumentuje posiadane systemy ratingowe, założenia ich budowy oraz przesłanki wyboru ich struktury;
- bank przeprowadza wewnętrzny proces zatwierdzania systemów ratingowych.



Bank po otrzymaniu zgody na stosowanie metody wewnętrznych ratingów (§ 4):

- nie może korzystać z metody standardowej
- w przypadku własnych oszacowań LGD nie ma odwrotu

chyba że KNF zezwoli (§ 12) – może to zrobić w odniesieniu do niektórych klas ekspozycji (głównie rządów i instytucji)