Wstęp do analitycznych i numerycznych metod wyceny opcji

Jan Palczewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 16 maja 2008

Rynki finansowe

- Rynek towarów/akcji
  - obiektem handlu jest towar (ziemniaki, węgiel, ropa) lub dobro umowne (udział w spółce)
  - instrumenty podstawowe są wielkościami namacalnymi
  - najprostszy do modelowania
- Rynek walut
  - wymiana abstrakcyjnych obiektów (pieniędzy): środka do zakupu dóbr
  - symetria spojrzenia
- Rynek stóp procentowych
  - obiektem handlu jest **operacja** lokowania i pożyczania pieniędzy na ustalonych warunkach
  - stopa procentowa jest abstrakcyjnym opisem jednego z warunków
  - inne to: nominał, okres inwestycji...

Instrumenty pochodne akcji i walut

- dwie podstawowe zasady rozliczeń: opcje europejskie i amerykańskie
- europejska opcja call
  - możliwość zakupu określonej ilości towaru/waluty po ustalonej cenie K w momencie T
  - reprezentacja jako wypłata:

$$\max(S_T - K, 0)$$

  - wypłata $(S_T - K)^+$ plus zakup towaru na rynku = opcja
- europejska opcja put $(K - S_T)^+$
- opcja binarna
- opcja barierowa

Instrumenty pochodne stopy procentowej

- caplet/floorlet
  - zabezpieczenie przed zbyt wysoką/niską stopą procentową
- cap/floor
  - pakiet capletów/floorletów
- swap
  - zamiana stopy stałej na zmienną i vice versa
  - zamiana stopy kredytu/lokaty
- swapcja

Cele matematyki finansowej

1. budowa złożonych instrumentów finansowych (inżynieria finansowa)
2. wycena instrumentów pochodnych
3. zebezpieczenie wypłat
    - czy jest jak zabezpieczać? CDO (Collateral Debt Obligation) – subprime crisis
4. ocena ryzyka zabezpieczenia

Główny wysiłek praktyków skupiony jest na (1) i (2).

Nasz cel: WYCENA

Realizacja

1. wyabstrahowanie najważniejszych dla wyceny danego instrumentu cech rynku i budowa modelu matematycznego
2. kalibracja modelu
3. wycena $\longrightarrow$ metody analityczne i numeryczne
4. strategie zabezpieczenia; obliczenie **Greeks**

Model Black'a-Scholes'a

Instrumenty podstawowe

- rachunek bankowy ze stopą procentową r

$$B_t = e^{rt}$$

- akcja

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t},$$

gdzie W_t jest procesem Wienera.

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

Założenia modelowe

- Jest możliwość krótkiej sprzedaży akcji.
- Nie ma możliwości arbitrażu.
- Handlowanie jest ciągłe.
- Nie ma kosztów transakcji i podatków.
- Wszystkie instrumenty finansowe są nieskończenie podzielne.
- Stopa procentowa pożyczki i lokaty jest identyczna niezależnie od okresu i nominału.

Trochę teorii...

Definicja

Wypłatą w momencie T nazywamy zmienną losową mierzalną względem historii rynku do chwili T.

Twierdzenie

Jeśli $\sigma \neq 0$ to model Black'a-Scholes'a jest zupełny, zaś cena wypłaty X wynosi

$$e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X),$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest miarą probabilistyczną taką, że

$$B_t = e^{rt}, \qquad \text{oraz} \qquad S_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t + (r - \sigma^2/2)t},$$

zaś $\tilde{W}_t$ jest procesem Wienera względem miary $\mathbb{Q}$.

Przykłady optymistyczne

1. Europejska opcja call: $X = (S_T - K)^+$

$$\text{cena} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big\{\Big(S_0 e^{\sigma Z + (r-\sigma^2/2)T} - K\Big)^+\Big\},$$

gdzie $Z \sim N(0,T)$.

2. Europejska opcja barierowa down-and-out call:

$$X = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{jeśli} \quad \min_{0\le t\le T} S_t > H, \\ 0, & \text{jeśli} \quad \min_{0\le t\le T} S_t \le H, \end{cases}$$

gdzie $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r-\sigma^2/2)t}$. Wówczas

$$\text{cena} = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$$

Przykłady nieco mniej optymistyczne

1. Opcja azjatycka call:

$$X = (S_{ave} - K)^+,$$

gdzie

$$S_{ave} = \frac{S_{t_1} + S_{t_2} + \ldots + S_{t_n}}{n}, \qquad \text{lub} \qquad S_{ave} = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt.$$

Wówczas cena $= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$.

2. Opcja amerykańska put: (twierdzenie)

$$\text{cena} = \sup_{0\le\tau\le T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+\}.$$

τ to moment stopu.

Główne problemy

- kalibracja: znalezienie parametrów modelu
  - stopa procentowa r,
  - zmienność σ,
  - uwaga! stopa zwrotu z akcji μ nie gra żadnej roli przy wycenie
- policzenie ceny
  - metody analityczne – wyrażenie składające się ze znanych i łatwo obliczalnych funkcji,
  - metody numeryczne – jak się nie da analitycznie

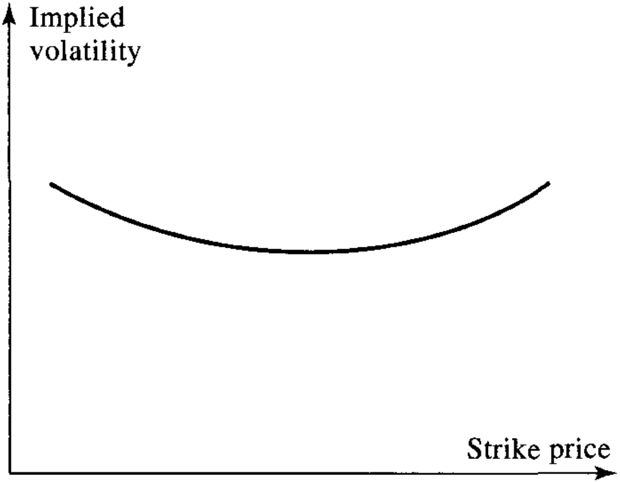
Kalibracja

1. stopa procentowa różna dla różnych okresów – jak wybrać r?
2. σ to zmienność cen akcji (ale to nie działa):

$$\sigma = \sqrt{Var\left(\frac{1}{\Delta}\log\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\right)}$$

3. zmienność implikowana
4. rażący brak zgodności modelu z rzeczywistością

Uśmiech zmienności



Tego będzie dziś sporo.

Co robić?

- Nauczyć się sprawnie oszukiwać model – obecnie najpowszechniejsza technika w praktyce
- Budować modele lepiej oddające funkcjonowanie rynku – np. model stochastycznej zmienności

$$
\begin{aligned}
dS_t &= S_t \mu dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t^1, \\
dV_t &= \alpha(\sigma - V_t)dt + \beta V_t dW_t^2.
\end{aligned}
$$

Ale wtedy jeszcze trudniej policzyć cenę $\Longrightarrow$ metody numeryczne.

Metody numeryczne

Kiedy?

- Wycena trudniejszych wypłat, w tym wielu powszechnie handlowanych.
- Wycena w bardziej zaawansowanych modelach.

Jak?

- Monte Carlo
- Równania różniczkowe cząstkowe (PDE)
- Drzewa dwumianowe

Monte Carlo - teoria

Mocne Prawo Wielkich Liczb

Niech (X_n) bedzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Wówczas

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1) \quad \text{p.n.}$$

Monte Carlo - praktyka

Jak policzyć cenę wypłaty X?

$$\text{cena } = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X).$$

Symulacja

Niech $X_1, \ldots, X_n$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie zmiennej X względem $\mathbb{Q}$. Wówczas

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$$

Oszacowanie błędu

Centralne Twierdzenie Graniczne

Niech (X_n) bedzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Wówczas

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,\mathbb{E}(X_1)}{sdev(X_1)\sqrt{n}} \to N\big(0,1\big) \quad \text{wg. rozkładu.}$$

Symulacja

Niech $X_1, \ldots, X_n$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie zmiennej X względem $\mathbb{Q}$. Wówczas

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx N\Big(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X), \frac{Var_{\mathbb{Q}}(X)}{n}\Big).$$

Metoda różniczkowa - teoria

Twierdzenie

Jeśli $X = h(S_T)$, to cena X w momencie t wynosi $V(S_t, t)$, gdzie funkcja $V(s,t)$ dana jest wzorem

$$V(s,t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(h(S_T)|S_t = s\big).$$

Ponadto,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s\frac{\partial^2 V(s,t)}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V(s,t)}{\partial s} - rV(s,t) + \frac{\partial V(s,t)}{\partial t} = 0.$$

Przykłady:

TAK: europejska opcja call/put, opcje binarne

NIE: opcje barierowe, azjatyckie

Opcja call

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\sigma^2 s \frac{\partial^2 V(s,t)}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V(s,t)}{\partial s} - rV(s,t) + \frac{\partial V(s,t)}{\partial t} = 0 \\
V(s,T) = (s-K)^+, \quad s > 0 \\
\lim_{s\to 0} V(s,t) = 0, \quad t \in [0,T] \\
\lim_{s\to\infty} \frac{V(s,t)}{s} = 1, \quad t \in [0,T]
\end{cases}
$$

Drzewo dwumianowe

Aproksymacja modelu Black'a-Scholes'a za pomocą:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{S_2 = S_0 u^2} & \cdots \\
 & \boxed{S_1 = S_0 u} \arrow[ur, "p_u"] \arrow[dr, "1-p_u"] & & \cdots \\
\boxed{S_0} \arrow[ur, "p_u"] \arrow[dr, "1-p_u"] & & \boxed{S_2 = S_0 ud} & \cdots \\
 & \boxed{S_1 = S_0 d} \arrow[ur, "p_u"] \arrow[dr, "1-p_u"] & & \cdots \\
 & & \boxed{S_2 = S_0 d^2} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\boxed{B_0 = 1} \longrightarrow \boxed{B_1 = 1 + r} \longrightarrow \boxed{B_2 = (1 + r)^2} \qquad \cdots
$$

Wycena przy pomocy wstecznej rekurencji.

Podsumowanie

1. Monte Carlo
   - bardzo uniwersalna (opcje zależne od trajektorii; różne modele), łatwa do zapisania
   - wolna zbieżność (da się czasami przyspieszyć)
2. Metoda różniczkowa
   - szybka i dokładna
   - daje całą funkcję wyceniającą $V(s,t)$
   - trudna do zapisania (warunki brzegowe, trudne wyprowadzenie równania)
3. Drzewo dwumianowe
   - dobra do opcji niezależnych od trajektorii i opcji amerykańskich
   - aproksymuje tylko model Black's-Scholes'a (z małymi uogólnieniami)
   - nie nadaje się do wyceny opcji zależnych od trajektorii