Wycena egzotycznego instrumentu pochodnego stopy procentowej

Trigger Swap

Andrzej Konieczek

BRE Bank

16 maja 2008

Wstęp

Dlaczego wycena instrumentów pochodnych jest trudnym problemem?

- Nie można precyzyjnie określić prawa, które rządzi rynkiem – rynek ulega ciągłej ewolucji
- Mamy do dyspozycji tylko jedną realizację "doświadczenia"
- Ceny instrumentów pochodnych zaburzone są premią za ryzyko kredytowe, niepłynność, użyteczność danej transakcji, podaż/popyt
- Zależność cen instrumentów pochodnych od parametrów nieobserwowalnych i niemożliwych do wyimplikowania z innych instrumentów
- Rynek jest niezupełny
- Bazuje na zaawansowanych metodach matematycznych (procesy stochastyczne, równania różniczkowe, metody numeryczne, statystyka)
- Konieczność doboru metod numerycznych pod kątem efektywnej implementacji

Wstęp

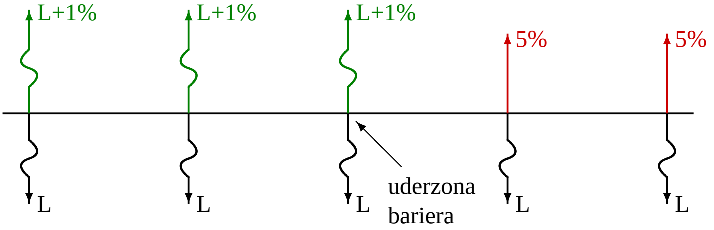
- Wycena za pomocą fundamentów
  - Parametry modelu estymowane na podstawie danych historycznych i prognoz ekonomicznych/statystycznych
  - Możliwość realizacji zysków z niedopasowania cen instrumentów pochodnych i właściwości statystycznych instrumentu podstawowego – możliwość arbitrażu statystycznego
  - Wyniki mogą się znacznie różnić w zależności od zakresu dat szeregów czasowych, częstotliwości próbkowania, typu danych (ceny kupna, sprzedaży, zamknięcia), użytego modelu – ryzyko arbitrażu natychmiastowego
- Wycena względna
  - Informacja o dynamice instrumentu podstawowego estymowana jest na podstawie cen innych instrumentów pochodnych
  - Przy odpowiedniej kalibracji zbliżone ceny w różnych modelach
  - Wymagana duża płynność podstawowych instrumentów pochodnych

Trigger Swap – struktura wypłaty

- W kolejnych okresach odsetkowych strona A płaci stronie B
  - do momentu przekroczenia bariery H przez stawkę referencyjną LIBOR 6M

    odsetki wg stawki referencyjnej LIBOR 6M+1%
  - po przekroczeniu bariery $H = 6\%$ przez stawkę referencyjną

    odsetki wg stawki stałej 5%
- W zamian strona B płaci stronie A odsetki wg stawki LIBOR 6M

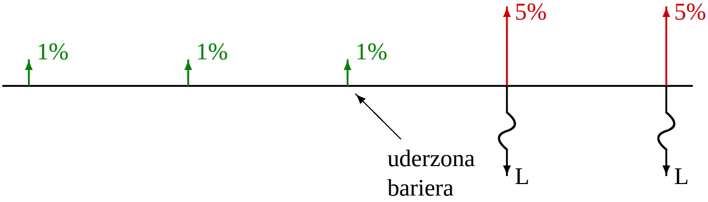


Trigger Swap – struktura wypłaty

- W kolejnych okresach odsetkowych strona A płaci stronie B
  - do momentu przekroczenia bariery H przez stawkę referencyjną LIBOR 6M

    odsetki wg stawki referencyjnej LIBOR 6M+1%
  - po przekroczeniu bariery $H = 6\%$ przez stawkę referencyjną

    odsetki wg stawki stałej 5%
- W zamian strona B płaci stronie A odsetki wg stawki LIBOR 6M



Trigger Swap – własności

- Wypłata w znacznym stopniu zależy od
  - prawdopodobieństwa uderzenia w barierę
  - korelacji pomiędzy stopą forward LIBOR i stopą forward IRS

    $\Rightarrow$ instrument wrażliwy na korelację stóp forward LIBOR

    $\Rightarrow$ model wielofaktorowy

    $\Rightarrow$ Monte Carlo
- Opcja barierowa, nieciągła wypłata

    $\Rightarrow$ problemy numeryczne przy liczeniu wrażliwości

Model Brace-Gątarek-Musiela

Struktura czasowa $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{N+1}, \quad T_{i+1} - T_i = \delta$

$$L_n(t) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(t,T_n)}{B(t,T_{n+1})} - 1\right)$$

$$\frac{dL_n(t)}{L_n(t)} = \sum_{i=\eta(t)}^{n} \frac{\rho_{in}(t)\ \sigma_n(t)\ \sigma_i(t)\ \delta L_i(t)}{1+\delta L_i(t)} dt + \sigma_n(t)\ dW_t^n \qquad (SDE)$$

gdzie

$$\eta(t): \quad T_{\eta(t)-1} \le t < T_{\eta(t)}$$

$$d < W_\cdot^i, W_\cdot^j >_t = \ \rho_{ij}(t)\ dt$$

Numeraire (spot LIBOR measure)

$$B(t) = B(t,\eta(t)) \sum_{i=0}^{\eta(t)-1} (1+\delta L_i(T_i))$$

Implementacja

Funkcja chwilowej zmienności (przedziałami stała)

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} k_i \bar{\sigma}_{i-\eta(t)+1} & t \leq T_i \\ 0 & t > T_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N$$

Funkcja chwilowej korelacji

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}^{\beta} = \mathrm{e}^{-\beta |T_i - T_j|} \qquad i,j = 1, \ldots, N, \quad \beta > 0$$

Implementacja

Dyskretyzacja równania (*SDE*) – schemat Eulera

$$0 = t_0 < \cdots < t_K, \quad \{T_0, \ldots, T_{N+1}\} \subseteq \{t_0, \ldots, t_K\}$$

$$\hat{Y}_n(t) = \ln(\hat{L}_n(t))$$

$$\hat{Y}_n(0) = \ln(\hat{L}_n(0)), \qquad \hat{L}_n(0) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{B(0,T_n)}{B(0,T_{n+1})} - 1\right)$$

$$\hat{Y}_n(t_{k+1}) = \hat{Y}_n(t_k) + \left(\hat{\mu}_n(t_k) - \frac{1}{2}\sigma_n^2(t_k)\right)(t_{k+1} - t_k) + \sigma_n(t_k)\sqrt{t_{k+1} - t_k}AZ_k$$

$$\hat{\mu}_n(t) = \sum_{i=\eta(t)}^{n} \frac{\rho_{in}(t)\ \sigma_n(t)\ \sigma_i(t)\ \delta\hat{L}_i(t)}{1 + \delta\hat{L}_i(t)}$$

$$A:\ AA^{\mathrm{T}} = [\rho_{ij}^{\beta}]$$

$$Z_k = [Z_k^1, \ldots, Z_k^N]^{\mathrm{T}}, \quad Z_k^i \sim N(0,1),\ i.i.d.$$

Wycena

$$PV_t = B(t)\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{X_{T_k}}{B(T_k)}\middle|\mathscr{F}_t\right]$$

$$X_{T_k} = \Big(a_k L_{k-1}(T_{k-1}) + b_k\Big)\delta \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{1}_{\{L_i(T_i)<H\}}$$

Dla $m = 1,\ldots,M$ symulujemy trajektorie zgodnie z przyjętą dyskretyzacją – indeks (m) oznacza m-tą realizację procesu $(\hat{L}_1(t),\ldots,\hat{L}_N(t))$

$$\begin{array}{cccc}
\hat{L}_0^{(m)}(T_0) & \hat{L}_1^{(m)}(T_0) & \ldots & \hat{L}_N^{(m)}(T_0) \\
 & \hat{L}_1^{(m)}(T_1) & \ldots & \hat{L}_N^{(m)}(T_1) \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & \hat{L}_N^{(m)}(T_N)
\end{array}$$

$$P\hat{V}_0 = \hat{B}(0)\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{\hat{X}_{T_k}^{(m)}}{\hat{B}^{(m)}(T_k)}$$

Kalibracja

Założenia kalibracji

- Instrumenty do kalibracji powinny odzwierciedlać jak najlepiej ryzyko instrumentu wycenianego
- Ceny instrumentów wybranych do kalibracji powinny być bliskie cenom otrzymywanym w modelu
- Dynamika instrumentów podstawowych w modelu (w naszym przypadku stóp forward LIBOR) ma zachować sens ekonomiczny i statystyczny
  - struktura terminowa zmienności i korelacji ma być zbliżona do statystycznej
  - jednorodność w czasie (przyszła zmienność i korelacje prognozowane przez model mają być zbliżone do dzisiejszych)
- Stabilność, ciągłość – małe zmiany parametrów wejściowych do kalibracji powinny implikować małe zmiany parametrów modelu

Kalibracja

Cap – seria następujących po sobie capletów

Caplet – opcja waniliowa na stopę procentową

$$\text{Wypłata z capleta :} \quad (L_n(T_n) - K)_+ \delta \quad \text{w chwili } T_{n+1}$$

$$c_n(K, T_n, \mathbf{s}_n, k_n) = \mathbb{E}\left[\frac{B(0)}{B(T_{n+1})} (L_n(T_n) - K)_+ \delta \middle| \mathscr{F}_0 \right] = \delta B(0, T_{n+1}) \left[L_n(t) N(d_1) - K N(d_2) \right]$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(L_n(0)/K) \pm \frac{1}{2} v_{T_n}^2 T_n}{v_{T_n} \sqrt{T_n}}$$

$$v_{T_n} = \sqrt{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \sigma_n^2(t) dt} = k_n \sqrt{\frac{1}{T_n} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\sigma}_{n-i}^2 (T_{i+1} - T_i)}$$

$$\mathbf{s}_n = (\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$$

Kalibracja

Niech $v_{T_i}^{mkt}$ będą zmiennościami capletów (zmienności implikowane, forward-forward volatility) o cenie wykonania K_i i czasie trwania T_i dla $i = 1, \dots, N$, do których będziemy kalibrować model.

Etap I
Zakładamy $k_i = 1$, $i = 1, \dots, N$

$$\mathbf{s}_N^* = \arg \min_{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_N} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \left(v_{T_i}(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_i) - v_{T_i}^{mkt} \right)^2$$

$$\mathbf{s}_N^* = (\bar{\sigma}_1^*, \dots, \bar{\sigma}_N^*)$$

$$v_{T_i}(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_i) = \sqrt{\frac{1}{T_i} \sum_{l=0}^{i-1} \bar{\sigma}_{i-l}^2 (T_{l+1} - T_l)}$$

w_i – wagi dobierane w zależności od wymagań co do kalibracji ($w_i = vega$ – minimalizacja odległości średniokwadratowej cen capletów)

Kalibracja

Etap II

Ten etap możemy pominąć jeżeli chcemy uzyskać model jednorodny w czasie.

Dobieramy współczynniki k_i tak, aby dokładnie dopasować ceny (zmienności implikowane) capletów

$$k_i = \frac{v_{T_i}^{mkt}}{v_{T_i}(\bar{\sigma}_1^*, \ldots, \bar{\sigma}_N^*)}$$

Kalibracja

Etap III
Estymacja parametru β dla macierzy korelacji może przebiegać na jeden z dwóch sposobów w zależności od danych wejściowych

a) Wejściowa macierz korelacji

$$[\rho_{ij}^{input}]$$

jest macierzą korelacji chwilowych (otrzymaną np. z estymacji z szeregu historycznego stóp forward LIBOR)

$$\beta^* = \arg\min_{\beta} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\rho_{ij}^{\beta} - \rho_{ij}^{input}\right)^2$$

Kalibracja

b) Wejściowa macierz korelacji

$$[\rho_{ij}^{input}]$$

jest macierzą korelacji terminowych

$$\rho_{ij}^{input} = \frac{\mathbb{E}\left[\left(L_i(\bar{T}) - \mathbb{E}[L_i(\bar{T})]\right)\left(L_j(\bar{T}) - \mathbb{E}[L_j(\bar{T})\right)\right]}{\sqrt{\mathbb{E}\left[L_i(\bar{T}) - \mathbb{E}[L_i(\bar{T})]\right]^2}\sqrt{\mathbb{E}\left[L_j(\bar{T}) - \mathbb{E}[L_j(\bar{T})]\right]^2}}$$

$$\bar{T} = \min\{T_i, T_j\}$$

Kalibracja

$$\beta^* = \arg\min_{\beta} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\bar{\rho}_{ij}^{\beta} - \rho_{ij}^{input}\right)^2$$

$$\bar{\rho}_{ij}^{\beta} \approx \frac{\exp\left\{\int_0^{\bar{T}} \rho_{ij}(t)\sigma_i(t)\sigma_j(t)dt\right\} - 1}{\sqrt{\exp\left\{\int_0^{\bar{T}} \sigma_i^2(t)dt\right\} - 1}\sqrt{\exp\left\{\int_0^{\bar{T}} \sigma_j^2(t)dt\right\} - 1}} =$$

$$\frac{\exp\left\{\sum_{k=0}^{\eta(\bar{T})-1} \rho_{ij}^{\beta}\,\bar{\sigma}_{i-k}\bar{\sigma}_{j-k}(T_{k+1}-T_k)\right\} - 1}{\sqrt{\exp\left\{\sum_{k=0}^{\eta(\bar{T})-1} \bar{\sigma}_{i-k}^2(T_{k+1}-T_k)\right\} - 1}\sqrt{\exp\left\{\sum_{k=0}^{\eta(\bar{T})-1} \bar{\sigma}_{j-k}^2(T_{k+1}-T_k)\right\} - 1}}$$

Wyniki

Błąd obliczeń

- statystyczny
  - skończona próbka
    rzędu $\frac{1}{\sqrt{M}}$
    możemy oszacować $\left(s.e. = \frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(Y^{(i)} - \overline{Y})^2}\right)$
    metody redukcji wariancji
  - niedoskonałość generatora liczb pseudolosowych
- dyskretyzacja procesu
  - skończony krok dyskretyzacji
    trudny do oszacowania
    ekstrapolacja
  - błąd zaokrągleń numerycznych
    trudny do kontrolowania

Hedging

- w modelu (in-model)
  parametr hedgowany jest jednym z parametrów stochastycznych modelu (np. stopy forward LIBOR)
- poza modelem (out-of-model)
  parametr hedgowany jest jednym z ustalonych parametrów wejściowych do modelu (np. zmienność, korelacja)

Wrażliwości

$$\Delta_i = \frac{\partial PV(L_i(0))}{\partial L_i(0)} \approx \frac{\hat{PV}_0(L_i(0)+\varepsilon) - \hat{PV}_0(L_i(0)-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

Problemy

- Rozkład lognormalny
- Problem wielowymiarowy (macierz korelacji niepełnego rzędu, problem źle uwarunkowany)
- Duża złożoność obliczeniowa
- Niestabilność kalibracji
- Niedopasowanie modelu
- Nadparametryzacja modelu
- Błąd MC
- Interpolacja DF
- Ryzyko operacyjne

Potrzebne umiejętności

- Teoretyczne
  - Zrozumienie podstaw teoretycznych matematyki finansowej
  - Umiejętność wyprowadzania formuł, aproksymacji
  - Metody numeryczne
- Ekonomiczne
  - Zrozumienie zasad działania rynku
  - Zrozumienie własności wycenianego instrumentu
  - Zrozumienie własności używanych modeli
- Informatyczne/Techniczne
  - Języki programowania (C++ najpopularniejszy)
  - Techniki programowania (wzorce, struktury danych)
  - Znajomość software'u/hardware'u (Excel, bazy danych, architektura komputera)

- A. Brace, D. Gątarek, M. Musiela, *The Market Model of Interest Rate Dynamics*. Mathematical Finance Vol. 7, No. 2002-01, 1997
- D. Brigo, F. Mercurio, *Interest Rates Models Theory and Practice*. Springer, 2001
- P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004
- P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1992
- M. Musiela, M. Rutkowski, *Continuous-Time Term Structure Models: Forward Measure Approach*. Finance and Stochastics, 4, 1997