Zmienność Implikowana w Wycenie Skomplikowanych Instrumentów

Andrzej Palczewski

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

Warszawa
25 kwietnia 2014

Plan wystąpienia

1. Wprowadzenie.
    - Praktycy lubią proste wzory.
    - Zmienność implikowana (*implied volatility*) a zmienność lokalna.
2. Jak przybliżać zmienność implikowaną ?
    - Model Berestycki-Busca-Florent.
    - Rozwinięcia asymptotyczne.
3. Ścisłe wyniki dla rozwinięć asymptotycznych.
4. Inne metody przybliżania zmienności implikowanej.

Dlaczego proste wzory są ważne?

Cytat z artykułu Mike Giles & Ronnie Sircar *Siam NEWS*, October 2007:

- " The major challenges in computational finance arise not from difficult geometries, as in many physical problems, but from the need for rapid calculation of an EXPECTATION or the solution of its associated Kolmogorov partial differential equation."
- " Efficiency is at the forefront, because models are re-estimated as new market data arrives and calibration (or "marking to market") embeds the expectation/PDE calculation in an iterative solution to an inverse problem."

Najlepszy jest wzór Blacka (Blacka-Scholesa)

W log-normalnym modelu cen instrumentów finansowych cena opcji (*call* lub *put*) dana jest zamkniętym wzorem (wzorem Blacka):

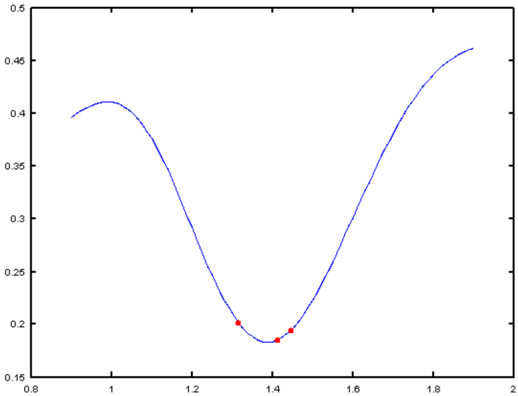
$$V_{call} = V_{call}(F_0, K, T, \sigma_B),$$

gdzie F_0 – cena *forward* instrumentu, K – cena realizacji (*strike*), T – czas do zapadalności (*expiry*) a σ_B – zmienność.

Z wyjątkiem σ_B wszystkie parametry wyznaczające cenę opcji są znane !
σ_B można wyznaczyć z cen opcji kwotowanych na rynku. Taka σ_B nazywa się zmiennością implikowaną.

Problem ze zmiennością implikowaną

Ceny instrumentów mają rzadko rozkład log-normalny. W efekcie σ_B nie jest stała dla danego instrumentu, ale zmienia się z K oraz T. Otrzymujemy tzw. "uśmiech zmienności"



Zmienność implikowana dla portfela instrumentów

Zmiana σ_B w zależności od K i T oznacza, że praktycznie dla każdego K i T mamy inny model rynku.
To sprawia ogromne problemy przy zarządzaniu ryzykiem dużych portfeli opcyjnych. Jakie σ_B użyć przy wyliczaniu pozycji zabezpieczających? (liczenie Delta lub Vega portfela)

Należy wyjść poza model log-normalny (model Blacka-Scholesa) rynku.

Rozszerzenie modelu Blacka-Scholesa

Model log-normalny (model Blacka-Scholesa)

$$dF_t = \sigma_B F_t dW_t, \quad F(t_0) = F_0.$$

W tym modelu σ_B jest stałe.

Model lokalnej (stochastycznej) zmienności

$$dF_t = \sigma(t, F_t, y_t) F_t dW_t, \quad F(t_0) = F_0.$$

W tym modelu $\sigma(t, F_t, y_t)$ jest funkcją czasu, ceny instrumentu bazowego, ale także zmiennej y_t, która może być innym procesem stochastycznym.

Problemy obliczeniowe

Model lokalnej (stochastycznej) zmienności

$$dF_t = \sigma(t, F_t, y_t) F_t dW_t, \quad F(t_0) = F_0 \tag{1}$$

nastręcza poważne problemy obliczeniowe.
Aby znaleźć cenę opcji należy

- znaleźć rozwiązanie równania (1) metodą symulacji Monte Carlo (to może być poważne wyzwanie, jeśli proces y_t jest wielowymiarowy);
- albo rozwiązać numerycznie równanie różniczkowe cząstkowe odpowiadające modelowi (1) (odpowiednik równania Blacka-Scholesa); to także może być poważne zadanie numeryczne, jeśli problem jest wielowymiarowy.

Problemy obliczeniowe c.d.

Opisane metody obliczeniowe na pewno nie dają możliwości wykonywania szybkich obliczeń, o których była mowa na początku.

Praktycy najchętniej używają wzoru Blacka, do którego chcieliby wstawić właściwą wartość zmienności implikowanej.

Problem:

Jak z modelu lokalnej (stochastycznej) zmienności wyznaczyć zmienność implikowaną?
Odpowiedź na to pytanie zajmuje teoretyków przez ostatnie 15 lat.

Model Berestycki-Busca-Florent

Zróbmy pewne uproszczenie modelu zakładając, że $\sigma(t, F, y) = \sigma(t, F)$, tzn. pozbywamy się dodatkowego procesu stochastycznego y_t.
Niech $C^{loc}(t, F)$ będzie ceną opcji *call* w modelu (1) po tym uproszczeniu. Funkcja ta spełnia następujące równanie

$$C_t^{loc} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, F)F^2 C_{FF}^{loc} = 0, \quad C^{loc}(T, F) = (F - K)^+. \tag{2}$$

Rozwiązanie to będziemy oznaczać $C^{loc}(t_0, F_0; T, K)$ aby podkreślić zależność od wszystkich istotnych parametrów.

Model Berestycki-Busca-Florent c.d.

Jeśli w równaniu poprzedniego slajdu wstawimy zamiast funkcji $\sigma(t, F)$ stałą θ, to otrzymamy rozwiązanie dane wzorem Blacka. To rozwiązanie będziemy oznaczać $C_{BS}(t_0, F_0; T, K, \theta)$. Zmiennośc implikowaną możemy teraz zdefiniować jako funkcję $\theta = \theta(t_0, F_0; T, K)$, taką że

$$C^{loc}(t_0, F_0; T, K) = C_{BS}(t_0, F_0; T, K, \theta) \tag{3}$$

Wykorzystując równość (3) oraz równanie (2), które spełniają funkcje $C^{loc}(t_0, F_0; T, K)$ i $C_{BS}(t_0, F_0; T, K, \theta)$, możemy znaleźć równanie, jakie spełnia funkcja $\theta(t_0, F_0; T, K)$.

Model Berestycki-Busca-Florent c.d.

Ponieważ równanie jest skomplikowane, napiszemy je w nowych zmiennych, które nieco upraszczają zapis.
Nowe zmienne niezależne:

$$x = \log(F/K), \quad \tau = T - t.$$

W nowych zmiennych równanie dla funkcji $\theta(\tau, x)$ ma postać

$$2\tau\theta\theta_\tau - \sigma^2\left(x\frac{\theta_x}{\theta} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}\tau^2\sigma^2\theta^2\theta_x^2 - \tau\sigma^2\theta\theta_{xx} + \theta^2 = 0. \quad (4)$$

W tym wzorze $\sigma = \sigma(\tau, x)$ jest oczywiście zmiennością lokalną z modelu (1).

Model Berestycki-Busca-Florent c.d

Równanie (4) jest jeszcze bardziej skomplikowane niż równanie (2), nie widać więc zalet wprowadzania takiego modelu.
Na dodatek rozwiązanie równania (4) interesuje nas w przedziale $\tau \in [0, T]$ a dla $\tau = 0$ równanie (4) staje się osobliwe.

Z drugiej strony, gdyby interesować się jedynie rozwiązaniem dla małych wartości τ, to równanie (4) możnaby traktować jako zaburzenie dużo prostszego równania

$$-\sigma^2\left(x\frac{\theta_x}{\theta} - 1\right)^2 + \theta^2 = 0.$$

Czy takie postępowanie można sformalizować matematycznie?

Metoda rozwinięć asymptotycznych

Odpowiedź na postawione pytanie jest pozytywna !
Początek tego typu badaniom dał Euler, który zajmował się problemem sumowalności szeregów potęgowych.
W przypadku rozwiązań równań różniczkowych teoria ta nazywa się metodą rozwinięć asymptotycznych.
Polega ona na poszukiwaniu rozwiązania równania w postaci szeregu potęgowego (względem "małego" parametru). Taki szereg potęgowy nie musi oczywiście być zbieżny (najczęściej nie jest !), ale można starać się pokazać, że skończona suma częściowa takiego szeregu przybliża właściwe rozwiązanie.
Dla naszego problemu poszukiwać będziemy rozwiązania równania (4) w postaci szeregu

$$\theta(\tau, x) = \theta^0(x) + \tau\theta^1(x) + \tau^2\theta^2(x) + \ldots .$$

Przybliżenie zerowego rzędu

Robimy dalsze uproszczenie zakładając, że lokalna zmienność $\sigma(\tau, x)$ jest jednorodna w czasie, czyli $\sigma = \sigma(x)$.

Wstawiając szereg potęgowy z poprzedniego slajdu do równania (4) oraz grupując wyrazy odpowiadające różnym potęgom τ dostajemy jako współczynnik przy zerowej potędze równość

$$\sigma^2(x)\big(x\theta_x^0 - \theta^0\big)^2 - (\theta^0)^4 = 0. \tag{5}$$

To jest równanie przybliżenia zerowego rzędu.

Rozwiązanie zerowego rzędu

Przy odpowiednich założeniach na temat gładkości funkcji $\sigma(x)$ rozwiązanie równania (5) dane jest wyrażeniem

$$\theta^0(x) = x\Big(\int_0^x \frac{du}{\sigma(u)}\Big)^{-1}. \tag{6}$$

Przy tym funkcja $\theta^0(x)$ jest klasy $C^2(\mathbb{R})$ i jest ograniczona razem ze swoimi pochodnymi.

Przybliżenie pierwszego rzędu

Jako współczynnik przy pierwszej potędze τ dostajemy wyrażenie

$$\sigma\left(x\theta^1_x - \theta^1\right) + 3\theta^0\theta^1 - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^0\theta^0_{xx} = 0. \tag{7}$$

To jest równanie przybliżenia pierwszego rzędu.

Zauważmy, że jest to liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu, łatwo więc powinno być znaleźć jego rozwiązanie.

Uwaga
Równania na przybliżenia wszystkich wyższych rzędów są też liniowymi równaniami pierwszego rzędu.

Rozwiązanie pierwszego rzędu

Przy odpowiednich założeniach na temat gładkości funkcji $\sigma(x)$ rozwiązanie równania (7) dane jest wyrażeniem

$$\theta^1(x) = \frac{(\theta^0(x))^3}{x^2} \ln \frac{\sqrt{\sigma(0)\sigma(x)}}{\theta^0(x)}. \tag{8}$$

Przy tym funkcja $\theta^1(x)$ jest klasy $C^2(\mathbb{R})$ i jest ograniczona razem ze swoimi pochodnymi.

Wyniki BBF dla przybliżenia zerowego rzędu

Twierdzenie (Berestycki, Busca, Florent 2002)

W granicy $\tau \to 0$ mamy zbieżność

$$\lim_{\tau \to 0} \theta(\tau, x) = \theta^0(x),$$

przy czym zbieżność jest jednostajna dla $x \in \mathbb{R}$.

Analogiczny wynik został udowodniony także bez upraszczającego założenia, że σ jest jednorodna w czasie, tj. dla przypadku, gdy $\sigma = \sigma(\tau, x)$ (Berestycki, Busca, Florent 2004).

Nowe wyniki dla przybliżenia zerowego rzędu

Twierdzenie

Załóżmy, że funkcja $\sigma(x)$ jest klasy $C^2(\mathbb{R})$ i ma ograniczone pochodne. Dodatkowo niech będą spełnione oszacowania

$$0 < \sigma_L \leq \sigma(x) \leq \sigma_U < \infty,$$

gdzie σ_L, σ_U są stałe.
Wtedy istnieją stałe $\kappa > 0$ i $\tau_0 > 0$, takie że dla rozwiązania równania (4) dla zmienności implikowanej zachodzi oszacowanie

$$|\theta(\tau, x) - \theta^0(x)| \leq \kappa\tau|\theta^0(x)|.$$

Oszacowanie to zachodzi dla wszystkich $\tau < \tau_0$.

Wyniki dla przybliżenia pierwszego rzędu

Twierdzenie

Niech spełnione będą założenia poprzedniego twierdzenia wzmocnione założeniem, że funkcja $\sigma(x)$ jest klasy $C^4(\mathbb{R})$ i ma ograniczone pochodne.
Wtedy istnieją stałe $\kappa > 0$ i $\tau_0 > 0$, takie że dla rozwiązania równania (4) dla zmienności implikowanej zachodzi oszacowanie

$$|\theta(\tau, x) - \theta^0(x) - \tau\theta^1(x)| \leq \kappa\tau^2|\theta^0(x)|.$$

Oszacowanie to zachodzi dla wszystkich $\tau < \tau_0$.

Rozwiązanie dla zmienności zależnej od czasu

Jak postępować w przypadku, gdy $\sigma = \sigma(\tau, x)$?

Wtedy należy także funkcję σ rozwinąć w szereg potęgowy względem τ

$$\sigma(\tau, x) = \sigma^0(x) + \tau\sigma^1(x) + \dots . \tag{9}$$

Wstawiając to rozwinięcie oraz rozwinięcie θ do równania dla zmienności implikowanej oraz grupując wyrazy z odpowiednimi potęgami τ dostaniemy w przybliżeniu zerowego rzędu analogiczne równanie jak w przypadku jednorodnym (jedynie funkcję $\sigma(x)$ zastąpi funkcja $\sigma^0(x)$).
Rozwiązanie zerowego rzędu będzie miało wtedy postać

$$\theta^0(x) = x\left(\int_0^x \frac{du}{\sigma^0(u)}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Przybliżenie pierwszego rzędu

W przybliżeniu pierwszego rzędu dostajemy równanie istotnie różne niż w przypadku jednorodnym w czasie

$$\sigma^0\left(x\theta^1_x - \theta^1\right) + 3\theta^0\theta^1 = \frac{1}{2}(\sigma^0)^2\theta^0\theta^0_{xx} + \frac{\sigma^1}{\sigma^0}(\theta^0)^2. \tag{11}$$

Rozwiązanie tego równania dane jest wzorem

$$\theta^1(x) = \frac{(\theta^0(x))^3}{x^2}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma^0(0)\sigma^0(x)}}{\theta^0(x)} + \int_0^x \frac{u\sigma^1(u)}{(\sigma^0(u))^2\theta^0(u)}du\right). \tag{12}$$

Wyniki dla przybliżenia pierwszego rzędu

Twierdzenie

Niech dla funkcji $\sigma^0(x)$ spełnione będą założenia analogiczne jak w przypadku jednorodnym w czasie spełniała funkcja $\sigma(x)$. Dodakowo załóżmy, że funkcja $\sigma^0(x)$ jest klasy $C^4(\mathbb{R})$ a funkcja $\sigma^1(x)$ jest klasy $C^2(\mathbb{R})$ i obie mają ograniczone pochodne. Wtedy istnieją stałe $\kappa > 0$ i $\tau_0 > 0$, takie że dla rozwiązania równania (4) dla zmienności implikowanej zachodzi oszacowanie

$$|\theta(\tau, x) - \theta^0(x) - \tau\theta^1(x)| \leq \kappa\tau^2|\theta^0(x)|,$$

gdzie θ^0 dana jest wzorem (10) a θ^1 wzorem (12) przy czym oszacowanie to zachodzi dla wszystkich $\tau < \tau_0$.

Cena opcji ze wzoru Tanaki

Wracamy do początkowego modelu rynku z lokalną zmiennością (deterministyczną a nie stochastyczną dla uproszczenia prezentacji).

$$dF_t = \sigma(t, F)F_t dW_t, \quad F(0) = F_0. \tag{13}$$

Zastosowanie formuły Tanaki prowadzi do następującego wzoru na cenę opcji

$$C^{loc}(0, F_0; T, K) =$$
$$P(0, T)\Big((F_0 - K)^+ + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma(t, K)^2 K^2 p(t, K|F_0)dt\Big). \tag{14}$$

$p(t, K|F_0)$ jest tu rozkładem prawdopodobieństwa dla procesu (13) warunkowanego na F_0.

Równanie wsteczne Kołmogorowa

Funkcja $p(t, F|F_0)$ spełnia wsteczne równanie Kołmogorowa

$$\begin{aligned}
\partial_t p(t, F|F_0) &= \frac{1}{2}\partial_F^2\Big(\sigma(t, F)^2 F^2 p(t, F|F_0)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sigma(t, F)^2 F^2 \partial_F^2 p(t, F|F_0) \\
&+ 2\sigma(t, F)F\partial_F\big(\sigma(t, F)F\big)\partial_F p(t, F|F_0) \\
&+ \sigma(t, F)F\partial_F^2\big(\sigma(t, F)F\big)p(t, F|F_0) \\
&+ \Big(\partial_F^2\big(\sigma(t, F)F\big)\Big)^2 p(t, F|F_0).
\end{aligned} \tag{15}$$

Uogólnienie

Rozważmy wielowymiarowy proces stochastyczny X_t spełniający układ równań

$$dX_t^i = \sum_j \sigma_j^i(X_t) dW_t^j,$$

$$d\langle W_t^i, W_t^j \rangle = \rho^{i,j} dt.$$

Prawdopodobieństwo przejścia dla tego procesu $G_{T,X}(t,x)$ spełnia wsteczne równanie Kołmogorowa

$$\partial_t G_{T,X}(t,x) + \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \partial^2_{x^i,x^j} G_{T,X}(t,x) = 0,$$

$$G_{T,X}(T,x) = \delta(x - X),$$

gdzie macierz $g^{i,j}$ jest dodatnio określona i dana wzorem

$$g^{i,j}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \rho^{k,l} \sigma_k^i(x) \sigma_l^j(x).$$

Uogólnienie c.d.

Dokonując zamiany zmiennych $\tau = T - t$ sprowadzamy równanie Kołmogorowa do równania przewodnictwa cieplnego

$$\partial_\tau G_X(\tau, x) = \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \partial^2_{x^i, x^j} G_X(\tau, x),$$
$$G_X(0, x) = \delta(x - X).$$

Uogólnienie c.d.

Niech $\mathcal{M}$ oznacza przestrzeń stanów procesu X_t. $\mathcal{M}$ jest rozmaitością Riemanna, jeśli metrykę Riemanna zdefiniujemy przez podanie wzoru na element długości

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) dx^i dx^j,$$

gdzie

$$g_{i,j}(x) = 2 \sum_{k,l} \frac{\rho_{k,l}}{\sigma_i^k(x)\sigma_j^l(x)}$$

a $\rho_{k,l}$ jest odwrotnością $\rho^{k,l}$.

Uogólnienie c.d.

Twierdzenie (Varadhan 1967)

$$\lim_{\tau \to 0} 2\tau \ln G_X(\tau, x) = -d^2(x, X).$$

$d(x, y)$ jest odległością geodezyjną punktów x i y na rozmaitości Riemanna $\mathcal{M}$ wyznaczoną przez ds

$$d(x, y) = \inf_{z(t):z(0)=x,z(1)=y} \int_0^1 \sum_{i,j} g_{i,j}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt} dt.$$

Uwaga

Asymptotyczna zbieżność z pracy Berestycki, Busca, Florent (2002) pokrywa się z twierdzeniem Varadhana (należy tylko zdefiniować właściwą strukturę riemannowską).

Uogólnienie c.d.

Równanie Kołmogorowa dla rozkładu prawdopodobieństwa $p(t, F|F_0)$ jest bardziej skomplikowane niż równanie przewodnictwa cieplnego

$$\begin{aligned} \partial_t p_{F_0}(t,F) = & \sum_{i,j} g^{i,j}(F)\partial^2_{F^i,F^j} p_{F_0}(t,F) + \sum_i b^i(F)\partial_{F^i} p_{F_0}(t,F) \\ & + q(F) p_{F_0}(t,F), \\ p_{F_0}(0,F) = & \delta(F - F_0). \end{aligned} \tag{16}$$

Aby badać takie równania na rozmaitości Riemanna należy zdefiniować wiązkę liniową nad rozmaitością $\mathcal{M}$, a następnie koneksję w tej wiązce $\mathcal{A}$ oraz przekroje wiązki $\mathcal{Q}$.

Uogólnienie c.d.

Wtedy równanie takiego typu jak równanie (16) można zapisać w postaci inwariantnej

$$\partial_t p(t, x|y) = Dp(t, x|y),$$

gdzie D jest operatorem eliptycznym na rozmaitości Riemanna

$$D = g^{-1/2} \sum_{i,j} g^{1/2} g^{i,j} (\partial_i + \mathcal{A}_i)(\partial_j + \mathcal{A}_j) + \mathcal{Q}$$

a $g = \det(g^{i,j})$.

Uogólnienie c.d.

W przypadku deterministycznej lokalnej zmienności równanie (16) jest jednowymiarowe. Można więc łatwo znaleźć koneksję $\mathcal{A}$ (jednowymiarową) oraz przekrój $\mathcal{Q}$ oraz wykorzystać pochodzące od Yosidy (1953) rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania równania (16). W przybliżeniu pierwszego rzędu daje to nastepujący wzór na cenę opcji *call*

$$P(0,T)^{-1}C^{loc}(0,F_0;T,K) = (F_0-K)^+ + \frac{\sqrt{\sigma(0,K)\sigma(0,F_0)T}}{2\sqrt{2\pi}}\times \left(H_1(\omega) + \left(Q(F_{av}) + \frac{3}{4}G(F_{av})\right)TH_2(\omega)\right),$$

gdzie H_1, H_2, Q i G są znanymi funkcjami a

$$F_{av} = (F_0+K)/2, \quad \omega = \int_{F_0}^{K} \frac{dx}{\sqrt{2Tx\sigma(0,x)}}.$$

Uogólnienie c.d.

Wykonując analogiczne obliczenia dla modelu Blacka (stała zmienność) oraz porównując otrzymane wzory możemy wyprowadzić przybliżenie pierwszego rzędu dla zmienności implikowanej $\theta(K, T)$

$$\theta(K,T) = \frac{\sqrt{\sigma(0,K)\sigma(0,F_0)}}{\sqrt{F_0 K}} \frac{H_1(\omega)}{H_1(\bar{\omega})} \times \\ \left(H_1(\omega) + \left(Q(F_{av}) + \frac{3}{4}G(F_{av})\right) T \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)} \right. \\ \left. + \frac{\theta(K,T)^2}{8} \frac{H_2(\bar{\omega})}{H_1(\bar{\omega})}\right),$$

gdzie

$$\bar{\omega} = \frac{\ln(K/F_0)}{\sqrt{2T}\theta(K,T)}.$$

DZIĘKUJĘ